

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEIDSON VITORIO KURPEL

TÉCNICAS DE SOLUÇÃO EXATA PARA PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE  
CONTÊINERES

CURITIBA

2020

DEIDSON VITORIO KURPEL

TÉCNICAS DE SOLUÇÃO EXATA PARA PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE  
CONTÊINERES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Ciências Exatas e Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Cassius Tadeu Scarpin  
Coorientador: Prof. Dr. José Eduardo Pécora Junior

CURITIBA

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

K96t

Kurpel, Deidson Vitorio

Técnicas de solução exata para problemas de carregamento de contêineres [recurso eletrônico] /Deidson Vitorio Kurpel. – Curitiba, 2020.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2020.

Orientador: Cassius Tadeu Scarpin. Coorientador: José Eduardo Pécora Junior.

1. Contêineres. 2. Levantamento e carregamento. 3. Armazenamento e transporte de carga. 4. Modelos matemáticos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Scarpin, Cassius Tadeu. III. Pécora, José Eduardo. IV. Título.

CDD: 355.411

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **DEIDSON VITORIO KURPEL** intitulada: **Técnicas de Solução Exata para Problemas de Carregamento de Contêineres**, sob orientação do Prof. Dr. CASSIUS TADEU SCARPIN, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 27 de Fevereiro de 2020.



CASSIUS TADEU SCARPIN

Presidente da Banca Examinadora



ROBERTO ZANETTI FREIRE

Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)



GUSTAVO VALENTIM LOCH

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



EDUARDO ALVES PORTELA SANTOS

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)



LEANDRO MAGATÃO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

*Para minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Aos professores Cassius e Pécora, pela orientação prestada a este trabalho.

Ao professor Leandro C. Coelho, pela parceria desenvolvida ao longo deste trabalho.

Ao *Compute Canada* e ao *Calcul Québec*, pela disponibilização de computadores de alto desempenho para execução dos testes apresentados neste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro concedido por meio de bolsa de estudos.

Aos funcionários do PPGMNE.

Aos amigos que, mesmo não fazendo pós-graduação, estiveram sempre do meu lado, nos momentos bons e ruins, especialmente a Larissa e o Raphael.

Aos amigos do GTAO, pelo apoio mútuo durante os anos de pesquisa. Impossível não mencionar, em especial, o Cleder, que eu conheci logo no meu primeiro dia na UFPR, lá em 2013, e que hoje é um dos meus melhores amigos, e a Naty, que desde que nos conhecemos sempre me deu os melhores conselhos e é uma irmã para mim.

À minha família, pelo incentivo constante, que se mostrou tão importante durante os anos do doutorado.

*The woods are lovely, dark and deep,  
But I have promises to keep,  
And miles to go before I sleep,  
And miles to go before I sleep.*  
Robert Frost

## RESUMO

Esta tese apresenta técnicas exatas de resolução de problemas de carregamento de contêineres. Tais problemas consistem em determinar um arranjo de caixas no interior de uma unidade de transporte de carga, de modo que os itens sejam alocados de modo ortogonal e sem sobreposição, otimizando uma função objetivo, que em geral busca maximizar o valor associado à carga ou definir a menor quantidade de contêineres necessários para efetuar o transporte dos itens. Formulações matemáticas para resolução destes problemas são apresentadas nesta tese. Quatro técnicas para determinar a posição que as caixas podem ocupar no interior do contêiner foram avaliadas. Estratégias para obtenção de *bounds* também foram apresentadas e testadas. As restrições de estabilidade de carga, orientação de caixas e separação de itens, comuns em situações reais de carregamento, foram incorporadas aos modelos apresentados neste trabalho. Testes computacionais em instâncias clássicas foram efetuados, e a comparação com outras abordagens da literatura de carregamento de contêineres mostrou que as técnicas apresentadas nesta tese foram capazes de obter soluções ótimas e aprimorar a melhor solução conhecida em diversas instâncias dos problemas abordados.

**Palavras-chaves:** Problema de carregamento de contêineres. Considerações práticas. Formulações matemáticas. Discretizações.



## ABSTRACT

This thesis presents exact techniques for solving container loading problems. Such problems consist in determining an arrangement of boxes within a cargo transport unit, so that items are placed orthogonally and without overlapping, optimizing an objective function, which generally seeks to maximize the value associated with the cargo or define the smallest number of containers needed to transport the items. Mathematical formulations for solving these problems are presented in this thesis. Four techniques for determining the position of boxes inside the container were evaluated. The constraints of loading stability, box orientation and separation of items, common in actual loading situations, were incorporated into the models presented in this work. Computational tests in classical instances were performed, and comparison with other approaches in the container loading literature showed that the techniques presented in this thesis were able to obtain optimal solutions and to improve the best known solution in several instances of the problems addressed.

**Key-words:** Container loading problem. Practical considerations. Mathematical formulations. Discretizations.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Tipos de problemas de minimização (do valor) das entradas. . . .	21
FIGURA 2 – Tipos de problemas de maximização (do valor) das saídas. . . .	22
FIGURA 3 – Caixa no interior de um contêiner com seu vértice no ponto $(p, q, r)$ . . . .	29
FIGURA 4 – Seis orientações possíveis para uma caixa do tipo $i$ . . . . .	29
FIGURA 5 – Pontos gerados por diferentes discretizações . . . . .	31
FIGURA 6 – Espaços gerados na heurística G&R . . . . .	39
FIGURA 7 – Exemplo de perda de solução ótima utilizando diferentes discretizações . . . . .	51
FIGURA 8 – Padrões de carregamento para a instância 12 de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) no MHLOPP . . . . .	66

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Comparação entre as discretizações para as instâncias de Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b) com $L = W = H = 10$ . . .	49
TABELA 2 – Comparação entre as discretizações para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) e Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) . .	49
TABELA 3 – Resultados para as instâncias $A_1$ . . . . .	52
TABELA 4 – Resultados para as instâncias $A_5$ . . . . .	52
TABELA 5 – Resultados para as instâncias $A_{10}$ . . . . .	52
TABELA 6 – Resultados para as instâncias $A_{20}$ . . . . .	53
TABELA 7 – <i>Bounds</i> para o SSSCSP para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) . . . . .	54
TABELA 8 – Resultados para as instâncias Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) .	55
TABELA 9 – Resultados para as instâncias Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) com estabilidade . . . . .	56
TABELA 10 – Resultados para as instâncias Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) com separação de caixas . . . . .	57
TABELA 11 – <i>Bounds</i> para o MSSCSP para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) . . . . .	59
TABELA 12 – Resultados para o MSSCSP para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) . . . . .	60
TABELA 13 – Resultados para o MSSCSP para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) com diferentes considerações práticas . . . . .	60
TABELA 14 – Resultados para o MILOPP para as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) . . . . .	62
TABELA 15 – Resultados para as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994)	64
TABELA 16 – Resultados para as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) com separação de caixas . . . . .	65
TABELA 17 – Resultados para as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) com estabilidade e com separação de caixas e estabilidade . . .	65

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO	14
1.1.1	Objetivo Geral	14
1.1.2	Objetivos Específicos	14
1.2	JUSTIFICATIVA DO TRABALHO	15
1.3	CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO	15
1.4	LIMITAÇÕES DO TRABALHO	16
1.5	ESTRUTURA DO TRABALHO	16
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>17</b>
2.1	PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO	17
2.2	PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES	18
2.3	CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS	21
2.4	TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO	25
2.4.1	Problemas de Minimização (do Valor) das Entradas	25
2.4.2	Problemas de Maximização (do Valor) das Saídas	26
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PROPOSTAS</b>	<b>28</b>
3.1	CONCEITOS PRELIMINARES	28
3.2	PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS ENTRADAS	31
3.3	PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS SAÍDAS	33
3.4	CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS	34
3.4.1	Separação de caixas	35
3.4.2	Estabilidade da carga	36
3.5	BOUNDS PARA PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS ENTRADAS	37
3.5.1	<i>Upper bound</i>	37
3.5.1.1	<i>Upper bound</i> sem considerações práticas	37
3.5.1.2	<i>Upper bound</i> com estabilidade da carga	41
3.5.1.3	<i>Upper bound</i> com separação de caixas	41
3.5.2	<i>Lower bound</i>	42
3.5.3	Estratégia para resolução de problemas de minimização (do valor) das entradas	43
<b>4</b>	<b>RESULTADOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>45</b>

		12
4.1	INSTÂNCIAS . . . . .	45
4.2	COMPARAÇÃO DAS TÉCNICAS DE DISCRETIZAÇÃO . . . . .	48
4.3	RESULTADOS PARA PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS ENTRADAS . . . . .	51
4.3.1	SSSCSP . . . . .	51
4.3.2	MSSCSP . . . . .	58
4.4	RESULTADOS PARA PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS SAÍDAS . . . . .	61
4.4.1	MILOPP . . . . .	61
4.4.2	MHLOPP . . . . .	61
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS . . . .</b>	<b>67</b>
5.1	CONCLUSÕES . . . . .	67
5.2	PROPOSTAS PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA . . . . .	69
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>APÊNDICES</b>		<b>80</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>FORMULAÇÕES PARA OBTENÇÃO DE CONJUNTOS DIS- CRETIZADOS . . . . .</b>	<b>81</b>
A.1	<i>NORMAL PATTERNS</i> . . . . .	81
A.2	<i>REDUCED RASTER POINTS</i> . . . . .	81
A.3	<i>REGULAR NORMAL PATTERNS</i> . . . . .	81
A.4	<i>MEET IN THE MIDDLE</i> . . . . .	82

## 1 INTRODUÇÃO

A gestão, organização e distribuição de bens constituem tarefas importantes no cenário industrial atual. Nesse contexto, o armazenamento e transporte de itens tem papel fundamental na movimentação de mercadorias, serviços e informações, visto que a satisfação dos clientes de uma empresa está intimamente ligada com a capacidade da mesma de atender as demandas do cliente, garantindo, por exemplo, que determinada mercadoria seja entregue no tempo correto, na disponibilidade exigida e sem danos (MOURA; OLIVEIRA, 2009).

No problema de carregamento de contêineres, o objetivo é determinar como alocar um conjunto de caixas com suas arestas ortogonais àquelas de um grande recipiente denominado contêiner. Tanto as caixas quanto o contêiner são poliedros tridimensionais, com formato de paralelepípedo. Variações desse tipo de problema surgem da distribuição de cargas, ao se empacotar itens no interior de contêineres que serão transportados por via marítima ou aérea, ou ainda no carregamento de caminhões para transporte rodoviário. Dada a natureza do problema, deve-se considerar todas as dimensões das caixas e dos contêineres ao se efetuar o planejamento do carregamento; casos simplificados do problema também podem ser abordados em uma ou duas dimensões.

Um padrão de carregamento factível é um arranjo de cargas no interior de um contêiner que atende a dois critérios: as caixas não se sobrepõem e estão totalmente alocadas no interior do contêiner. O uso eficiente do espaço interno do contêiner pode reduzir substancialmente o custo do transporte da carga, gerando significativo impacto financeiro para produtores, transportadores e consumidores. Além disso, importantes considerações práticas podem ser exploradas ao se planejar um padrão de carregamento, tais como a orientação com que as caixas serão carregadas, a estabilidade da carga e a distribuição de peso no interior do contêiner.

Bischoff e Ratcliff (1995) descrevem doze considerações práticas observadas em problemas de carregamento de contêineres, algumas das quais ainda não foram satisfatoriamente estudadas na literatura (BORTFELDT; WÄSCHER, 2013; ZHAO et al., 2016; VEGA-MEJÍA; MONTOYA-TORRES; ISLAM, 2019). Em particular, este trabalho irá abordar três considerações práticas listadas por Bischoff e Ratcliff (1995): a orientação com a qual os itens podem ser colocados no interior dos contêineres, a estabilidade da carga, fundamental para garantir arranjos de caixas que não danifiquem os bens transportados e garantam a segurança das operações de carga e descarga, e a separação de itens, quando determinadas caixas não podem ser carregadas em um mesmo contêiner.

Formulações matemáticas, baseadas em programação linear inteira 0-1, serão apresentadas neste trabalho de modo a considerar duas situações envolvendo o carregamento de contêineres. Primeiro, assume-se que há uma quantidade suficiente de contêineres para transportar os itens, de modo que o objetivo será determinar a quantidade mínima de contêineres para transportar todas as caixas. Para este tipo de problema, também serão apresentadas estratégias para obtenção de *bounds*, com o intuito de diminuir a quantidade de variáveis e de restrições nas formulações para este tipo de problema. Em seguida, consideram-se situações em que há uma quantidade limitada de contêineres, insuficiente para alocar todos os itens. Neste caso, o objetivo é determinar o arranjo de itens que será carregado de modo a maximizar o valor associado à carga.

Cabe destacar que as formulações e resultados apresentados neste trabalho foram compiladas e reunidas em um artigo científico submetido e aceito para publicação no periódico *European Journal of Operational Research*. A versão integral do artigo pode ser consultada no link <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.12.012>.

## 1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta tese é propor formulações matemáticas para problemas envolvendo o carregamento de contêineres, de modo a observar as considerações práticas de orientação das caixas, estabilidade da carga e separação de itens.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

São objetivos específicos deste trabalho:

- Apresentar formulações matemáticas para problemas de carregamento de contêineres, considerando tanto situações onde o objetivo é a maximização do valor associado à carga quanto casos onde se busca alocar os itens em uma quantidade mínima de contêineres;
- Apresentar formulações matemáticas para as considerações práticas de orientação das caixas, estabilidade da carga e separação de itens;
- Testar técnicas de discretização para diminuir a quantidade de variáveis e restrições dos modelos gerados.
- Apresentar técnicas de obtenção de *upper* e *lower bounds* para problemas cujo objetivo é minimizar o número de contêineres necessários para carregar um conjunto de caixas.

## 1.2 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

A alocação de bens no interior de contêineres aumenta significativamente a proteção da carga da ação de fatores externos que podem danificá-la (OLSSON; LARSSON; QUTTINEH, 2020). No entanto, custos associados com o transporte de bens costumam ter um forte impacto nas empresas (CHRISTOPHER, 2018). Deste modo, este trabalho visa contribuir com estratégias de resolução que são capazes de obter a solução exata de tais problemas, podendo ser utilizadas de modo a diminuir custos, permitindo a gestão eficiente de recursos quando é necessário efetuar procedimentos de carga, descarga e transporte de bens.

## 1.3 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Dentre as principais contribuições desta tese, destacam-se as adaptações realizadas no modelo matemático de Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b), visando considerar problemas de carregamento tridimensional onde há mais de um contêiner disponível. Tais adaptações permitiram a resolução de sete variações do problema de carregamento de contêineres, englobando tanto casos onde o objetivo era a minimização do número de contêineres utilizados quanto em situações com objetivo de maximizar o valor associado à carga.

Nos modelos matemáticos apresentados, foram consideradas as restrições práticas de orientação das caixas, estabilidade da carga e separação de caixas. Tais situações são comuns no cotidiano, e sua inserção nas técnicas de resolução apresentadas permitiu a exploração de uma ampla gama de problemas mais realistas.

Quatro técnicas para obtenção das possíveis posições que uma caixa pode ocupar em um contêiner foram avaliadas neste trabalho, com especial interesse na performance de tais estratégias em conjunto com as considerações práticas incorporadas aos modelos.

Técnicas para obtenção de *upper bounds* e *lower bounds*, necessárias para a resolução de problemas com objetivo de determinar o número mínimo de contêineres, foram apresentadas na tese. As estratégias para cálculo do *upper bound* foram combinadas com variações nas heurísticas de carregamento propostas por George e Robinson (1980) e Moura e Oliveira (2005).

Testes foram realizados utilizando instâncias clássicas da literatura, quando disponíveis. Para um tipo de problema, um novo conjunto de testes foi desenvolvido. Na maioria dos casos, as estratégias de resolução obtiveram resultados ótimos, com melhoria das soluções em diversos problemas.



## 1.4 LIMITAÇÕES DO TRABALHO

O problema de como organizar a carga no interior dos contêineres leva, naturalmente, ao problema de como transportar esses itens, uma vez organizados, de modo a minimizar o custo do transporte. Entretanto, uma limitação deste trabalho consiste na não apresentação de uma proposta para integração de problemas de carregamento e roteamento. Outra limitação do trabalho consiste na dificuldade em abordar problemas com características fortemente heterogêneas, em virtude das características dos modelos descritos nesta tese.

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho é dividido em cinco capítulos. Além deste Capítulo, que procura familiarizar o leitor quanto aos temas que serão discutidos a seguir, o Capítulo 2 apresenta uma revisão de literatura, contextualizando os problemas de carregamento de contêineres, as considerações práticas que podem surgir em situações cotidianas e estratégias de resolução já utilizadas para abordar problemas similares aos estudados neste trabalho. O Capítulo 3 apresenta as formulações matemáticas desenvolvidas nesta tese. O Capítulo 4 traz uma análise detalhada dos resultados computacionais obtidos quando se avaliou as formulações propostas apresentadas neste trabalho. Por fim, o Capítulo 5 sumariza as contribuições deste trabalho, bem como apresenta sugestões para a continuidade da pesquisa.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste Capítulo, apresenta-se o problema de carregamento de contêineres, objeto de estudo do trabalho. Inicialmente, faz-se uma discussão geral a respeito de problemas de corte e empacotamento, mostrando como os problemas podem ser classificados de acordo com variações em suas características, dando-se ênfase à classificação de problemas com itens tridimensionais. Na sequência, apresenta-se um conjunto de doze considerações práticas, isto é, situações cotidianas ao se planejar a alocação de caixas em um contêiner. Por fim, o Capítulo encerra-se com uma discussão a respeito de algumas técnicas de resolução clássicas para o problema.

### 2.1 PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO

Na Pesquisa Operacional, problemas de corte e empacotamento consistem, essencialmente, em determinar o melhor arranjo de um conjunto de unidades menores, denominadas itens, no interior de unidades maiores, chamadas objetos (DYCKHOFF, 1990). Esses tipos de problema ocorrem diariamente, por exemplo, ao se realizar a programação de canais de telecomunicação (ARBIB; MARINELLI, 2017), no posicionamento de itens em prateleiras (XAVIER; MIYAZAWA, 2008), no corte de vidros, tecidos, chapas de metal e bobinas de papel (TOLEDO et al., 2013; MARTINEZ-SYKORA et al., 2015; ANDRADE; BIRGIN; MORABITO, 2016) e no carregamento de paletes, caminhões e aeronaves (JUNQUEIRA; MORABITO; YAMASHITA, 2012a; PAQUAY; LIMBOURG; SCHYNS, 2018; OLSSON; LARSSON; QUTTINEH, 2020).

Embora sejam problemas essencialmente distintos, visto que nos problemas de corte procura-se determinar a melhor maneira de cortar itens de um ou mais objetos com o menor desperdício de material, enquanto os problemas de carregamento visam obter um arranjo de itens no interior de um ou mais objetos com melhor aproveitamento possível do espaço, há uma forte relação entre esses problemas: um padrão de corte factível também é um padrão de carga factível e vice-versa (DYCKHOFF, 1990).

Neste trabalho, estuda-se um caso particular dos problemas de empacotamento, onde tanto os itens quanto os objetos são poliedros regulares tridimensionais com formato de paralelepípedo. Devido à natureza do problema, deve-se considerar as três dimensões dos itens e dos objetos. Esse tipo de problema surge ao se carregar um conjunto de caixas com suas arestas paralelas aos lados um contêiner. Por isso, os objetos e os itens serão denominados, respectivamente, como contêineres e caixas ao longo deste trabalho, enquanto o problema será denominado como Problema de Carregamento de Contêineres.

## 2.2 PROBLEMAS DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES

De acordo com a tipologia de Wäscher, Haußner e Schumann (2007), a diversidade dos contêineres e das caixas é um fator importante nos problemas de carregamento de contêineres. Os itens e objetos disponíveis para carregamento podem ser idênticos, isto é, tem as mesmas dimensões e formas; fracamente heterogêneos, ou seja, podem ser agrupados em um número relativamente pequeno (em relação ao total) de subconjuntos nos quais as dimensões das caixas/contêineres são idênticas; e fortemente heterogêneos, onde poucos (ou mesmo nenhum) itens/objetos possuem dimensões idênticas.

Wäscher, Haußner e Schumann (2007) ainda classificam os problemas de carregamento de contêineres de acordo com o tipo de designação de caixas para contêineres que será efetuado: se um subconjunto de caixas será arranjado no interior de um número limitado de contêineres, insuficiente para acomodar todos os itens de modo a maximizar o “valor” (volume, lucro, entre outros) dos itens carregados, tais problemas podem ser classificados como de maximização (do valor) das saídas. Por outro lado, se um subconjunto de contêineres de “valor” mínimo será escolhido para acomodar a totalidade dos itens, os problemas são denominados como minimização (do valor) das entradas.

Combinando os critérios de diversidade e tipo de designação, Wäscher, Haußner e Schumann (2007) definem 14 variações do problema de carregamento de contêineres:

- Problemas de minimização (do valor) das entradas:
  - *Single Stock-Size Cutting Stock Problem* (SSSCSP): Consiste em empacotar um conjunto de itens fracamente heterogêneos em um número mínimo de contêineres idênticos. Esse problema foi abordado por Ivancic, Mathur e Mohanty (1989), Bortfeldt (2000), Eley (2002), Eley (2003), Zhu, Huang e Lim (2012), Grunewald et al. (2018) e Alonso et al. (2019).
  - *Multiple Stock-Size Cutting Stock Problem* (MSSCSP): Procura-se acondicionar um conjunto de itens fracamente heterogêneos no interior de contêineres fracamente heterogêneos, visando minimizar o total de contêineres necessários para alocar as caixas. Estratégias de resolução para esse problema foram apresentadas por Ivancic, Mathur e Mohanty (1989), Eley (2003), Che et al. (2011) e Correcher et al. (2017).
  - *Residual Cutting Stock Problem* (RCSP): Caracterizado pela necessidade de alocar um conjunto de itens fracamente heterogêneos dentro de uma seleção de contêineres fortemente heterogêneos, de modo a minimizar o

total de contêineres necessários para posicionar todas as caixas. Problemas com essas características foram abordados por Chen, Lee e Shen (1995).

- *Single Bin-Size Bin Packing Problem* (SBSBPP): Busca-se posicionar um conjunto de itens fortemente heterogêneos no interior de um número mínimo de contêineres idênticos. Problemas assim foram tratados por Hifi, Negre e Wu (2014), Elhedhli, Gzara e Yan (2017) e Mahvash, Awasthi e Chauhan (2018).
  - *Multiple Bin-Size Bin Packing Problem* (MBSBPP): Procura empacotar um conjunto de itens fortemente heterogêneos no interior de uma seleção de contêineres fracamente heterogêneos, visando minimizar o total de contêineres necessários para alocar o total de caixas. Esse problema foi abordado por Baazaoui, Hanafi e Kamoun (2017) e Paquay, Limbourg e Schyns (2018).
  - *Residual Bin Packing Problem* (RBPP): Caracterizado pela necessidade de acondicionar um conjunto de itens fortemente heterogêneos no interior de uma seleção de contêineres fortemente heterogêneos, de modo a minimizar o total de contêineres usado para abrigar as caixas. Estratégias de resolução para esse problema foram apresentadas por Lin, Chang e Yang (2006) e de Almeida e Figueiredo (2010).
  - *Open Dimension Problem* (ODP): Consistem em colocar um conjunto de itens dentro de um único contêiner com uma ou mais dimensões variáveis, de modo que o volume do contêiner seja minimizado. É possível ainda diferenciar problemas do tipo ODP entre aqueles com fraca heterogeneidade de carga (ODP/W) e aqueles com forte heterogeneidade de carga (ODP/S). Problemas com ao menos uma dimensão variável foram abordados por Bortfeldt e Mack (2007), Wu et al. (2010), Allen, Burke e Kendall (2011), Elhedhli, Gzara e Yan (2017) e Junqueira e Morabito (2017).
- Problemas de maximização (do valor) das saídas:
    - *Identical Item Packing Problem* (IIPP): Procura carregar um único contêiner com a quantidade máxima possível de itens idênticos. Esse problema foi abordado por Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b).
    - *Single Large Object Placement Problem* (SLOPP): Procura-se carregar um único contêiner com um conjunto de itens fracamente heterogêneos, de modo que o volume (ou valor) total dos itens alocados seja máximo. Estratégias de resolução para esse problema foram apresentadas por George e Robinson (1980), Moura e Oliveira (2005), Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b) e Silva, Toffolo e Wauters (2019).

- *Multiple Identical Large Object Placement Problem* (MILOPP): Caracterizado pela necessidade de alocar uma seleção de itens fracamente heterogêneos dentro de um número limitado de contêineres idênticos, fazendo com que o volume (ou valor) total dos itens dispostos seja máximo. Técnicas de resolução que podem ser empregadas para esse tipo de problema foram apresentadas por Hifi (2002).
- *Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem* (MHLOPP): Busca-se posicionar um conjunto de itens fracamente heterogêneos no interior de um número limitado de contêineres (fracamente ou fortemente) heterogêneos, maximizando o volume (ou valor) total dos itens carregados. Problemas assim foram tratados por Mohanty, Mathur e Ivancic (1994), Bortfeldt (2000), Takahara (2008) e Ren, Tian e Sawaragi (2011a).
- *Single Knapsack Problem* (SKP): Visa carregar um único contêiner com um conjunto de itens fortemente heterogêneos, tal que o volume (ou valor) total dos itens escolhidos seja máximo. Esse problema foi abordado por Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b) e Silva, Toffolo e Wauters (2019).
- *Multiple Identical Knapsack Problem* (MIKP): Caracterizado pela necessidade de alocar uma seleção de itens fortemente heterogêneos no espaço interno de um número limitado de contêineres idênticos, fazendo com que o volume (ou valor) total dos itens escolhidos seja máximo. Problemas com essas características foram abordados por Koloch e Kaminski (2010).
- *Multiple Heterogeneous Knapsack Problem* (MHKP): Procura posicionar um conjunto de itens fortemente heterogêneos no interior de um número limitado de contêineres (fracamente ou fortemente) heterogêneos, maximizando o volume (ou valor) total dos itens carregados. Estratégias de resolução para esse problema foram apresentadas por Ceschia e Schaerf (2013).

As FIGURAS 1 e 2 apresentam um resumo das características dos problemas de minimização (do valor) das entradas e dos problemas de maximização (do valor) das saídas, respectivamente.

As técnicas de resolução apresentadas para problemas de minimização (do valor) das entradas neste trabalho serão utilizadas para o MSSCSP e para o SSSCSP. De acordo um levantamento efetuado por Bortfeldt e Wäscher (2013), de um total de 163 publicações analisadas, somente 4,9% (isto é, 8 artigos) abordam o MSSCSP, e apenas 11,7% (19 trabalhos) tratam do SSSCSP. Já para problemas de maximização (do valor) das saídas, as formulações serão empregadas para resolução do MHOLPP e do MILOPP. Bortfeldt e Wäscher (2013) afirmam que apenas 4 de 163 trabalhos (2,45%) tratam do MHLOPP, enquanto apenas o artigo de Hifi (2002), de acordo tanto

Características das caixas \ Características dos contêineres		Fracamente heterogêneas	Fortemente heterogêneas
Todas as dimensões fixas	Idênticos	SSSCSP	SBSBPP
	Fracamente heterogêneas	MSSCSP	MBSBPP
	Fortemente heterogêneas	RCSP	RBPP
Único contêiner com no mínimo uma dimensão variável		ODP	

FIGURA 1 – Tipos de problemas de minimização (do valor) das entradas.

FONTE: adaptado de Wäscher, Haußner e Schumann (2007).

com Bortfeldt e Wäscher (2013) quanto Zhao et al. (2016), apresenta formulações que podem ser utilizadas para resolução do MILOPP, embora o autor não chegue a resolver tais tipos de problema. Análises mais recentes da literatura de carregamento de contêineres, efetuadas por Zhao et al. (2016) e Vega-Mejía, Montoya-Torres e Islam (2019), mostram que, nos últimos anos, poucos trabalhos foram feitos com o intuito de resolver problemas como os abordados nesta tese.

### 2.3 CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS

Para que um padrão de carregamento para o Problema de Carregamento de Contêineres seja considerado factível, basta que não exista sobreposição de itens e, além disso, que todas as caixas sejam colocadas em sua totalidade no interior do contêiner de modo ortogonal, isto é, com suas arestas paralelas as arestas do contêiner. Entretanto, em situações de carregamento reais, é comum a necessidade da garantia de uma série de considerações práticas, que permitem a obtenção de padrões de carregamento que, além de factíveis, impõem determinadas restrições a maneira como as caixas devem ser alocadas nos contêineres. Bischoff e Ratcliff (1995) descrevem doze restrições práticas comuns em operações diárias de carga/descarga de itens:

Características das caixas \ Características dos contêineres		Idênticas	Fracamente heterogêneas	Fortemente heterogêneas
Todas as dimensões fixas	Único contêiner	IIPP	SLOPP	SKP
	Idênticos		MILOPP	MIKP
	Heterogêneos		MHLOPP	MHKP

FIGURA 2 – Tipos de problemas de maximização (do valor) das saídas.

FONTE: adaptado de Wäscher, Haußner e Schumann (2007).

- Limitação de peso do contêiner: Essa consideração prática impede que o peso dos itens carregados ultrapasse o peso máximo que o contêiner pode suportar. Trabalhos abordando essa restrição podem ser encontrados em Terno et al. (2000), Gendreau et al. (2006), Alonso et al. (2017) e Olsson, Larsson e Quttineh (2020).
- Distribuição de peso no contêiner. Restrições quanto a distribuição de peso no interior do contêiner requerem uma distribuição uniforme do peso das caixas carregadas no piso do contêiner, diminuindo o risco dos itens movimentarem-se durante o transporte. Essa consideração prática foi abordada por Eley (2002), Eley (2003), Elhedhli, Gzara e Yan (2017) e Olsson, Larsson e Quttineh (2020).
- Prioridade de carregamento de itens. Em problemas com essa consideração prática é necessário decidir quais caixas devem ser carregadas, de acordo com critérios de prioridade de embarque de cada item, tais como a data de entrega da caixa ou prazo de validade do produto. Problemas assim foram tratados por Ren, Tian e Sawaragi (2011b), Sheng et al. (2017) e Alonso et al. (2019).
- Orientação de itens. Um item pode ser colocado ortogonalmente, isto é, com suas arestas paralelas às arestas do contêiner, em até seis orientações distintas. Entretanto, na prática, o número de orientações pode ser restrito: Junqueira,



Morabito e Yamashita (2012b) abordam problemas com orientação fixa das caixas, enquanto Gendreau et al. (2006) e Toffolo et al. (2017), por exemplo, permitem apenas rotações horizontais (isto é, a altura das caixas é fixa). Já Ivancic, Mathur e Mohanty (1989), Mohanty, Mathur e Ivancic (1994), Ren, Tian e Sawaragi (2011a) e Zhu, Huang e Lim (2012) permitem que os itens sejam carregados na orientação mais conveniente dentre as possíveis.

- Empilhamento de itens. Esta consideração prática leva em conta a fragilidade dos itens, limitando a quantidade de itens que podem ser colocados acima de uma caixa já posicionada no interior do contêiner, de modo a impedir que o item sofra deformações. Problemas com essa restrição foram abordados por Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b), Correcher et al. (2017), Paquay, Limbourg e Schyns (2018) e Olsson, Larsson e Quttineh (2020).
- Carregamento completo de grupos de itens. Em determinadas situações, deve-se garantir que um subconjunto de itens esteja presente no carregamento, mesmo que isso acarrete no desperdício de parte do espaço interno do contêiner. Problemas com essa restrição podem ser encontrados em Eley (2003) e Toffolo et al. (2017).
- Separação de itens. Exigências de separação de itens demandam que certas caixas não sejam carregadas no mesmo contêiner, ou que não sejam colocadas de modo adjacente no interior de um contêiner. Essa consideração prática foi abordada por Eley (2003).
- Agrupamento de itens. Exigências de agrupamento de itens ocorrem apenas em problemas de carregamento de múltiplos contêineres, pois demanda-se que um subconjunto de itens seja obrigatoriamente carregado no mesmo contêiner. Trabalhos com essa consideração prática podem ser encontrados em Terno et al. (2000), Gendreau et al. (2006), Junqueira, Morabito e Yamashita (2012a) e Alonso et al. (2019).
- Manuseio de itens. Essa restrição surge quando deve-se dispor determinados itens em posições específicas no contêiner, visando agilizar os processos de embarque e desembarque. Essa restrição prática foi abordada por Haessler e Talbot (1990), Ranck Júnior et al. (2019) e Olsson, Larsson e Quttineh (2020).
- Múltiplos destinos. A restrição prática de múltiplos destinos é, em geral, decorrente da combinação do problema de carregamento de contêineres com o problema de roteamento de veículos, onde procura-se efetuar a alocação da carga de modo a facilitar o desembarque da mesma, evitando manuseios desnecessários das caixas em um ponto de entrega. Problemas assim foram tratados por Bortfeldt e



Homberger (2013), Männel e Bortfeldt (2016), Alonso et al. (2017), Grunewald et al. (2018) e Bortfeldt e Yi (2020).

- Estabilidade. A estabilidade do padrão de carregamento exige um percentual mínimo de adjacência das laterais das caixas, de modo que movimentos significativos quando o contêiner é movimentado não ocorram. Essa restrição foi tratada por Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b), Zhu, Huang e Lim (2012), Araya, Guerrero e Nuñez (2017), Ramos, Silva e Oliveira (2018) e Olsson, Larsson e Quttineh (2020).
- Complexidade de carregamento. Restrições de complexidade de carregamento estão ligadas às limitações de recursos humanos e tecnológicos necessários para efetuar o processo de carregamento/descarregamento de itens. Essa consideração prática foi trabalhada por Hifi (2002) e Olsson, Larsson e Quttineh (2020).

Embora algumas das considerações práticas citadas anteriormente tenham sido amplamente abordadas na literatura, outras raramente são exploradas. Da amostra de 163 trabalhos analisada por Bortfeldt e Wäscher (2013), a orientação das caixas e a estabilidade da carga foram consideradas em 115 (70,55%) e 61 (37,42%) publicações, respectivamente; no entanto, a consideração prática de carregamento completo de itens foi abordada em apenas 1 artigo (isto é, 0,61% da amostra) enquanto restrições de prioridades de carregamento de itens foram tratadas em somente 3 (1,84%) trabalhos.

Neste trabalho, apresentam-se abordagens para três importantes considerações práticas: orientação das caixas, estabilidade da carga e separação de caixas. Embora as restrições de estabilidade e de orientação das caixas sejam frequentemente consideradas na literatura de problemas de carregamento de contêineres (BORTFELDT; WÄSCHER, 2013), a exigência de separação de caixas é menos abordada em problemas de corte e empacotamento tridimensionais; além disso, nenhuma formulação matemática foi apresentada para abordar tal consideração prática. É importante destacar que, embora existam trabalhos que tratam da separação de itens em problemas unidimensionais (JANSEN, 1999; HIFI; MICHRAFY, 2007) e bidimensionais (KHANAFER; CLAUTIAUX; TALBI, 2012; DE QUEIROZ et al., 2017), tais abordagens não podem ser diretamente estendidas a problemas tridimensionais, visto que a adição de uma terceira dimensão à geometria do problema afeta a formulação como um todo (POLLARIS et al., 2015). De acordo com Bortfeldt e Wäscher (2013) e Vega-Mejía, Montoya-Torres e Islam (2019), apenas o trabalho de Eley (2003) aborda explicitamente, de forma heurística, a consideração prática de separação de itens em problemas de carregamento tridimensionais.

## 2.4 TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO

Nesta Seção, estratégias de resolução para o Problema de Carregamento de Contêineres serão brevemente discutidas. Será dada ênfase à discussão de técnicas empregadas para resolver os mesmos tipos de problemas abordados neste trabalho, e que posteriormente serão utilizadas para critérios de comparação com os algoritmos descritos no Capítulo 3.

### 2.4.1 Problemas de Minimização (do Valor) das Entradas

Dentre as abordagens utilizadas para resolução de problemas do tipo de minimização (do valor) das entradas, Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) apresentam um procedimento de geração de colunas, onde cada coluna representa um padrão de carregamento factível. Os padrões obtidos são utilizados por uma heurística, baseada em programação inteira, que procura determinar qual o melhor padrão de carga para os contêineres por meio da resolução de problemas com um único contêiner.

Bortfeldt (2000) utiliza uma técnica sequencial para preenchimento dos contêineres, onde diferentes estratégias de escolha de contêineres são apresentadas. Além disso, estratégias para a escolha das caixas também são delineadas, priorizando a escolha de caixas de maior volume como uma maneira de garantir que os últimos contêineres a serem carregados tenham um bom aproveitamento de volume. Adaptações nas estratégias são apresentadas para considerar problemas de maximização (do valor) das saídas.

Eley (2002) apresenta um algoritmo que ordena as caixas em ordem decrescente de volume, carregando os maiores itens primeiro. As caixas são colocadas no interior do contêiner de modo a criar blocos de caixas idênticas. À medida que os itens são escolhidos, um algoritmo de busca em árvore é executado, permitindo considerar diferentes tipos de sequência para alocação de itens no interior do contêiner.

Lim e Zhang (2005) apresentam uma técnica de busca gulosa para resolução do problema. Os autores apontam que, em geral, é comum a existência de caixas “problemáticas”, isto é, caixas que possuem dimensões relativamente grandes em relação ao tamanho do contêiner e que, provavelmente, serão difíceis de posicionar se não forem carregadas no início. Assim, os autores definem um algoritmo que procura preencher os contêineres de modo sequencial, atribuindo a cada tipo de caixa um fator de prioridade, que é atualizado a cada iteração do algoritmo.

Tanto Che et al. (2011) quanto Zhu, Huang e Lim (2012) utilizam procedimentos que envolvem geração padrões de carregamento que serão utilizados como colunas em um problema de particionamento de conjuntos. Entretanto, enquanto Che et al. (2011) efetuaram uma adaptação da heurística G4, proposta originalmente por Scheithauer e

Terno (1996) para problemas de carregamento de paletes, para obtenção de padrões de carga para problemas tridimensionais com caixas fracamente homogêneas, Zhu, Huang e Lim (2012) inicialmente definem um problema mestre restrito e então obtém aproximações de cada coluna, denominadas protótipos, por meio da resolução de um problema de *pricing*. Cada protótipo informa apenas a quantidade de cada tipo de caixa presente no padrão de carga. Os protótipos que aparecem na solução do problema mestre restrito são então transformados em padrões de carga utilizando uma heurística de carregamento de um único contêiner.

#### 2.4.2 Problemas de Maximização (do Valor) das Saídas

Problemas de maximização (do valor) das saídas também foram foco de diversas pesquisas. Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) apresentam uma heurística sequencial, baseada em geração de colunas, para resolução do problema. Essa heurística é aplicada em dois estágios: inicialmente, padrões de carga para cada um dos tipos de contêineres disponíveis são gerados de modo a maximizar a utilização daquele contêiner (isto é, como se fosse um problema com um único contêiner). Na sequência, analisa-se quais padrões de carga foram utilizados nos contêineres carregados e escolhe-se aqueles que obtiveram os melhores resultados. Então, um problema da mochila é utilizado para determinar, de forma sequencial, qual o melhor padrão de carga para os contêineres.

Eley (2003) utiliza uma heurística gananciosa que obtém uma solução para uma determinada sequência de caixas, que podem ser colocadas nos contêineres tanto de modo sequencial quanto simultâneo. Com base nessa solução inicial, uma busca em árvore é efetuada para considerar diferentes sequências de alocação das caixas. Por fim, os padrões de carregamento mais promissores são utilizados como colunas para resolver um problema de particionamento de conjuntos. Adaptações são efetuadas de modo a considerar problemas de minimização (do valor) das entradas.

Takahara (2008) apresenta um algoritmo de duas fases para o problema: inicialmente, um conjunto de soluções iniciais é obtido efetuando o carregamento dos contêineres utilizando sequências aleatórias de tipos de caixas a serem carregadas. A seguir, uma busca local é efetuada para otimizar não apenas a ordem de carregamento dos itens, mas também a orientação com a qual eles serão alocados.

O método de Ren, Tian e Sawaragi (2011a) dá preferência a alocação das maiores caixas nos contêineres por meio de uma regra de prioridade. Depois disso, as caixas remanescentes são carregadas. Para melhorar a qualidade dos carregamentos, um algoritmo de busca em árvore é efetuado e os contêineres são recarregados, respeitando as regras de prioridade estabelecidas na primeira etapa e procurando reorganizar as demais caixas em cuboides.

Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b) apresenta um modelo de programação linear 0-1, baseado nas formulações propostas por Beasley (1985) para problemas de corte bidimensionais, para problemas de maximização (do valor) das saídas com um único contêiner, que serão usadas como base para as formulações apresentadas no próximo capítulo deste trabalho.

### 3 FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PROPOSTAS

Neste Capítulo, apresentam-se formulações utilizadas como metodologia de resolução para problemas de carregamento de contêineres. Inicialmente, na Seção 3.1, conceitos básicos para do problema serão apresentados. Modelos matemáticos para problemas de minimização (do valor) das entradas e para problemas de maximização (do valor) das saídas são abordados na seções 3.2 e 3.3, respectivamente. A Seção 3.4 traz formulações para as considerações práticas de separação de caixas e de estabilidade da carga. Por fim, o Capítulo encerra-se com a Seção 3.5, que apresenta a descrição de técnicas para obtenção de *bounds* para problemas de minimização (do valor) das entradas.

#### 3.1 CONCEITOS PRELIMINARES

As estratégias de resolução apresentadas neste trabalho consideram um conjunto de  $m$  tipos distintos de caixas, sendo que cada caixa do tipo  $i \in \{1, \dots, m\}$  possui comprimento  $l_i$ , largura  $w_i$ , altura  $h_i$ , volume (or valor associado)  $v_i$ , e disponibilidade  $b_i$ . Considera-se também  $\mathcal{K}$  tipos de contêineres, sendo que cada contêiner do tipo  $k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}$  tem comprimento  $L_k$ , largura  $W_k$ , altura  $H_k$  e volume  $V_k$ . Para problemas de maximização (do valor) das saídas, cada contêiner do tipo  $k$  possui disponibilidade  $C_k$ ; para problemas de minimização (do valor) das entradas, a disponibilidade dos contêineres é limitada por um *upper bound* válido.

Considerando-se o sistema cartesiano de coordenadas, define-se  $(p, q, r)$  como o vértice inferior frontal esquerdo de uma caixa no interior do contêiner, como mostra a FIGURA 3. As caixas podem assumir, por meio de rotações ortogonais, diferentes orientações no interior de um contêiner. Embora uma caixa possa ser empacotada em até seis diferentes orientações, situações mais restritas podem ser abordadas, em que não é possível carregar uma caixa em determinada orientação (por exemplo, caixas com a instrução “este lado para cima!”).

Nas formulações apresentadas neste trabalho, aborda-se a consideração prática de orientação das caixas, assumindo-se que um item pode ser carregado em até seis orientações diferentes, obtidas por meio de rotações ortogonais. Para tanto, as orientações que uma caixa do tipo  $i$  pode assumir são dadas por meio da decomposição das dimensões  $(l_i, w_i, h_i)$  de uma caixa em novos itens de dimensões  $(l_{ig}, w_{ig}, h_{ig})$ , onde  $g \in \Omega_i \neq \emptyset$ , com  $\Omega_i \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , tal que  $(l_{i1}, w_{i1}, h_{i1}) = (l_i, w_i, h_i)$ ,  $(l_{i2}, w_{i2}, h_{i2}) = (l_i, h_i, w_i)$ ,  $(l_{i3}, w_{i3}, h_{i3}) = (w_i, l_i, h_i)$ ,  $(l_{i4}, w_{i4}, h_{i4}) = (w_i, h_i, l_i)$ ,  $(l_{i5}, w_{i5}, h_{i5}) = (h_i, l_i, w_i)$  e  $(l_{i6}, w_{i6}, h_{i6}) = (h_i, w_i, l_i)$ , como mostra-se na FIGURA 4.

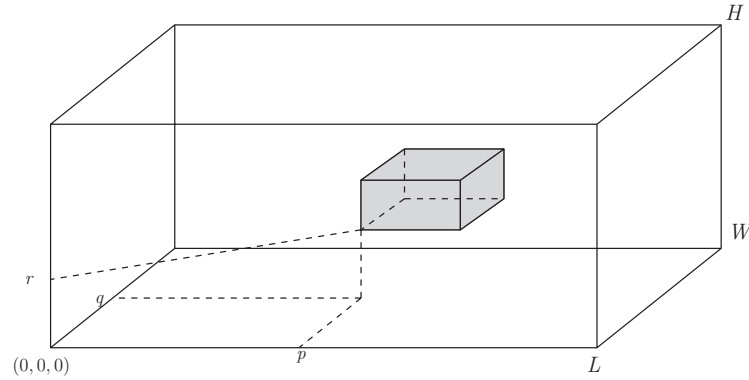


FIGURA 3 – Caixa no interior de um contêiner com seu vértice no ponto  $(p, q, r)$ .

FONTE: o autor (2020).

Rotações simétricas podem ser evitadas limitando-se as possíveis orientações de uma caixa. Supondo-se, por exemplo, que uma caixa possui dimensões  $(l_i, w_i, h_i)$ , com  $l_i = w_i$ . Neste caso, as orientações obtidas com  $g = 1$  e  $g = 3$  ( $g = 2$  e  $g = 4$ , e também  $g = 5$  e  $g = 6$ ) são equivalentes. Desse modo, pode-se impedir tais orientações, considerando-se  $\Omega_i = \{1, 2, 5\}$ , de modo a reduzir a quantidade de variáveis sem perda de generalidade.

Os conjuntos a seguir, denotados neste trabalho como Discretização Unitária (UN), indicam as possíveis posições que uma caixa pode assumir em relação às dimensões do contêiner:

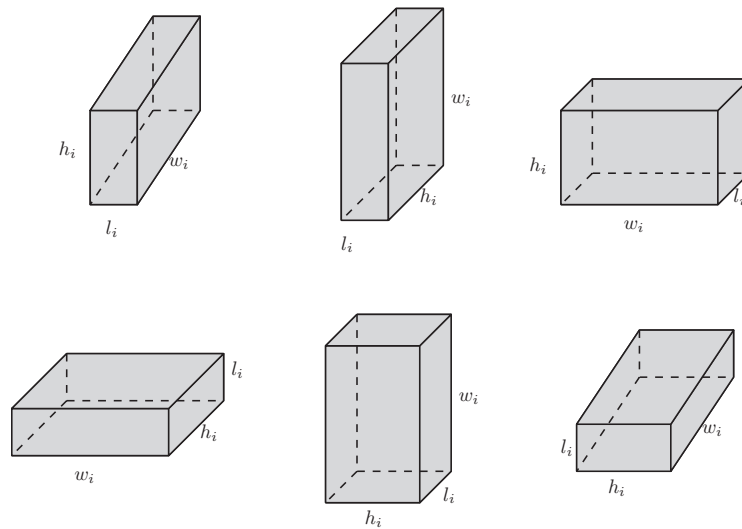


FIGURA 4 – Seis orientações possíveis para uma caixa do tipo  $i$

FONTE: o autor (2020).

$$X_k = \{p \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq p \leq L_k - \min_i(l_{ig}), \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall g \in \Omega_i\},$$

$$\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (3.1)$$

$$Y_k = \{q \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq q \leq W_k - \min_i(w_{ig}), \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall g \in \Omega_i\},$$

$$\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (3.2)$$

$$Z_k = \{r \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq r \leq H_k - \min_i(h_{ig}), \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall g \in \Omega_i\},$$

$$\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}. \quad (3.3)$$

A enumeração dos conjuntos que descrevem todas as possíveis posições que uma caixa pode assumir ao longo dos eixos de um contêiner permite apenas a resolução de pequenos problemas, em virtude da grande quantidade de possíveis posições que devem ser consideradas ao se decidir onde empacotar um item, muitas das quais são redundantes ou simétricas. Neste trabalho, quatro técnicas para gerar os possíveis pontos que podem ser ocupados pelo vértice inferior frontal esquerdo de uma caixa foram adaptadas para os problemas de carregamento tridimensional abordados nesse trabalho: *Normal Patterns* (NP), *Reduced Raster Points* (RRP), *Regular Normal Patterns* (RNP), e o Princípio *the Meet in the Middle* (MiM).

O NP, originalmente descrito por Herz (1972) e Christofides e Whitlock (1977), leva em consideração que uma caixa, ao ser carregada, pode ser movida em direção a frente, fundo e/ou esquerda do contêiner até que o item fique adjacente a outras caixas ou às paredes do contêiner, eliminando posições simétricas que uma caixa pode ocupar. Visando obter um conjunto com número ainda menor de elementos, Terno, Lindemann e Scheithauer (1987) e Scheithauer e Terno (1996) introduziram o RRP, derivados do NP. Embora não exista uma garantia de que não há perda de generalidade no RRP (DE QUEIROZ, 2010), nos testes numéricos efetuados por de Queiroz et al. (2012) e também neste trabalho, não houve perda de solução ótima.

Boschetti, Mingozzi e Hadjiconstantinou (2002) introduziram o RNP, conjuntos nos quais as possíveis posições que uma caixa do tipo  $i$  pode assumir no interior de um contêiner são computadas determinando-se as posições de todos os tipos de caixas, exceto  $i$ . Já o MiM, proposto por Côté e Iori (2018), é definido para cada caixa e para dado limitante  $\mathbb{T}$  (por exemplo, metade do comprimento), e consiste na combinação de dois padrões: aqueles formados por itens alinhados à esquerda de  $\mathbb{T}$ , e aqueles com as caixas arranjadas à direita do limitante.

O exemplo bidimensional dado a seguir ilustra o impacto das discretizações apresentadas anteriormente. Seja uma superfície retangular com dimensões  $(L, W) =$

$(27, 15)$ , que pode ser carregada com quatro itens, que possuem dimensões  $(l_1, w_1) = (5, 8)$ ,  $(l_2, w_2) = (10, 5)$ ,  $(l_3, w_3) = (12, 4)$  e  $(l_4, w_4) = (15, 8)$ , todos com disponibilidade de uma unidade. Por simplicidade, assume-se que os itens possuem orientação fixa. Utilizando a UN, tem-se um total de 276 possíveis posições a serem analisadas. Com o NP, esse número é reduzido para 40 pontos. Já ao se empregar o RRP, tem-se um total de 21 posições, enquanto tanto o RNP quanto o MiM apresentam 28 pontos. A FIGURA 5 apresenta os planos referentes a cada discretização.

As discretizações descritas acima tem por objetivo, neste trabalho, obter conjuntos com cardinalidade menor do que aqueles dados pelas formulações (3.1)–(3.3), consequentemente gerando modelos com menos variáveis e restrições. As formulações utilizadas para obtenção dos conjuntos discretizados encontram-se no Apêndice A.

### 3.2 PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS ENTRADAS

Para descrição dos modelos de minimização (do valor) das entradas, consideram-se os seguintes conjuntos e variáveis de decisão. Os conjuntos dados por (3.4)–(3.6) enumeram as possíveis coordenadas que uma caixa do tipo  $i$ , em sua  $g$ -ésima orientação, pode assumir no interior de um contêiner:

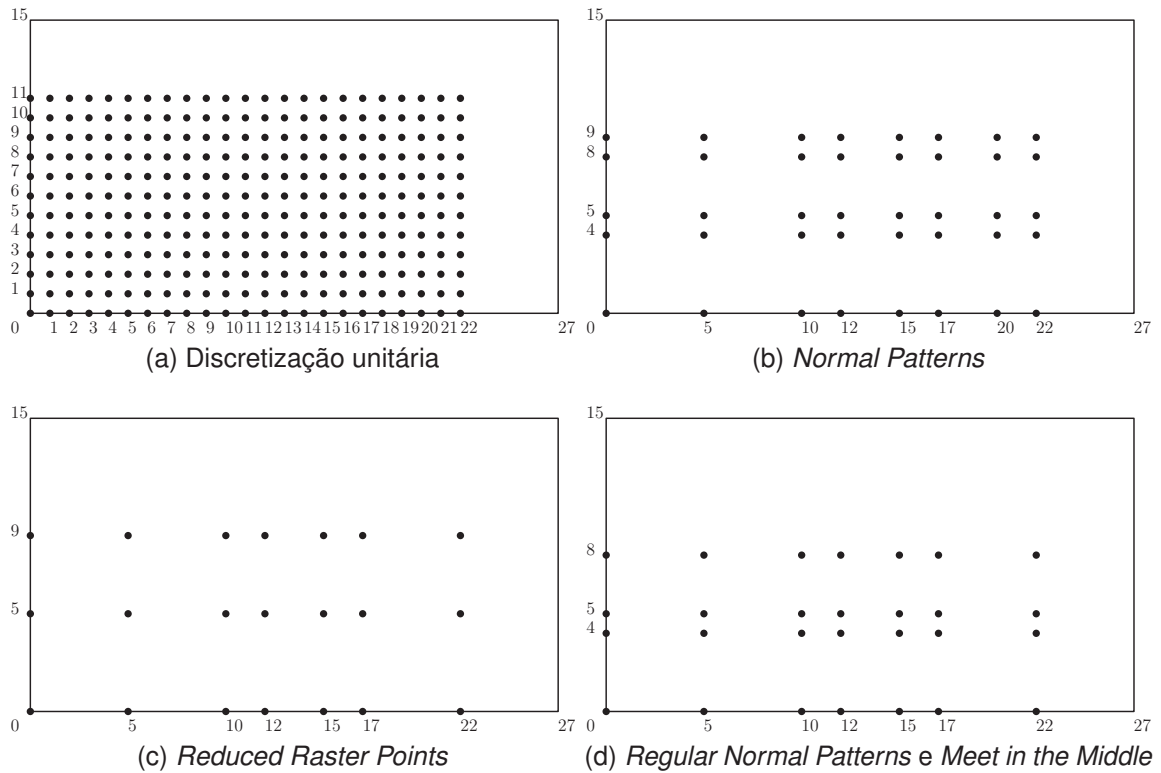


FIGURA 5 – Pontos gerados por diferentes discretizações



$$X_{igk} = \{p \in X_k \mid 0 \leq p \leq L_k - l_{ig}\},$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall g \in \Omega_i, \quad \forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (3.4)$$

$$Y_{igk} = \{q \in Y_k \mid 0 \leq q \leq W_k - w_{ig}\},$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall g \in \Omega_i, \quad \forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (3.5)$$

$$Z_{igk} = \{r \in Z_k \mid 0 \leq r \leq H_k - h_{ig}\},$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall g \in \Omega_i, \quad \forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}. \quad (3.6)$$

O modelo possui duas variáveis de decisão:  $x_{ig}^{jkpqr}$ , que assume valor igual a 1 se uma caixa do tipo  $i$ , em sua  $g$ -ésima orientação, tem seu vértice inferior frontal esquerdo no ponto  $(p, q, r)$  do  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$ , e 0 caso contrário, além da variável  $e_{jk}$ , igual a 1 se o  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$  é utilizado, e 0 caso contrário.

A formulação matemática para problemas de minimização (do valor) das entradas é dada por:

$$\min \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{C_k} V_k e_{jk} \quad (3.7)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{g \in \Omega_i} \sum_{\{p \in X_{igk} \mid s - l_{ig} + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{igk} \mid t - w_{ig} + 1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_{igk} \mid u - h_{ig} + 1 \leq r \leq u\}} x_{ig}^{jkpqr} \leq e_{jk},$$

$$s \in X_k, \quad t \in Y_k, \quad u \in Z_k, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad j \in \{1, \dots, C_k\} \quad (3.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{C_k} \sum_{g \in \Omega_i} \sum_{p \in X_{igk}} \sum_{q \in Y_{igk}} \sum_{r \in Z_{igk}} x_{ig}^{jkpqr} = b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (3.9)$$

$$e_{jk} \in \{0, 1\}, \quad x_{ig}^{jkpqr} \in \{0, 1\}, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad g \in \Omega_i, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\},$$

$$j \in \{1, \dots, C_k\}, \quad p \in X_{igk}, \quad q \in Y_{igk}, \quad r \in Z_{igk}. \quad (3.10)$$

A função objetivo (3.7) minimiza o volume total para empacotar as caixas. As restrições (3.8) garantem que não há sobreposição de caixas no interior do  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$ , caso o mesmo seja utilizado. Tais restrições garantem que um

ponto  $(s, t, u)$  é ocupado por, no máximo, um único item. As restrições (3.9) exigem que todas as caixas sejam carregadas, permitindo que os itens sejam rotacionados ortogonalmente, assumindo até seis posições, enquanto as restrições (3.10) definem o domínio das variáveis.

Visto que a formulação apresentada anteriormente é indiferente à heterogeneidade das caixas e dos contêineres, a mesma pode ser utilizada para resolver todos os tipos de problemas de minimização (do valor) das entradas cujos contêineres possuem dimensões fixas. Entretanto, cabe ressaltar que a formulação matemática proposta pode obter resultados insatisfatórios ao ser utilizada para abordar problemas com características fortemente heterogêneas, pois as discretizações tendem a gerar conjuntos com grande número de pontos que, por sua vez, irão se refletir num maior número de variáveis em comparação com problemas fracamente heterogêneos. Assim, a formulação é mais apropriada para resolver o MSSCSP e, se há apenas um tipo de contêiner (isto é,  $\mathcal{K} = 1$ ), o SSSCSP. No caso deste problema, a função objetivo procura minimizar o número de contêineres utilizados.

Soluções equivalentes podem ocorrer pela simples permuta dos contêineres de mesmo tipo utilizados. Para evitar tais simetrias, consideram-se as seguintes restrições, que impõem uma ordem para utilização dos contêineres disponíveis:

$$e_{jk} \leq e_{(j-1)k}, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad j \in \{2, \dots, C_k\}. \quad (3.11)$$

As modificações efetuadas na formulação original de Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b), tais como a inclusão de novos índices e somatórios nas restrições e na função objetivo, assim como a desigualdade de quebra de simetria, são críticas para abordagem de diferentes categorias de problemas de carregamento de contêineres de modo a obter soluções ótimas de modo eficiente.

### 3.3 PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS SAÍDAS

Alterações na função objetivo e nas restrições do modelo para problemas de minimização (do valor) das entradas, descritas a seguir, permitem a construção de uma formulação matemática para a abordagem de problemas de maximização (do valor) das saídas com múltiplos contêineres.

As variáveis de decisão  $x_{ig}^{jkpqr}$  possuem a mesma interpretação daquelas apresentadas em (3.7)–(3.10); uma vez que todos os contêineres disponíveis serão utilizados para carregar as caixas, as variáveis  $e_{jk}$  não são necessárias nos modelos

para problemas de maximização (do valor) das saídas. Desse modo, a formulação matemática para problemas de maximização (do valor) das saídas é dada por:

$$\max \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{C_k} \sum_{i=1}^m \sum_{g \in \Omega_i} \sum_{p \in X_{igk}} \sum_{q \in Y_{igk}} \sum_{r \in Z_{igk}} v_i x_{ig}^{jkpqr} \quad (3.12)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{g \in \Omega_i} \sum_{\{p \in X_{igk} | s-l_{ig}+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{igk} | t-w_{ig}+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_{igk} | u-h_{ig}+1 \leq r \leq u\}} x_{ig}^{jkpqr} \leq 1, \\ s \in X_k, \quad t \in Y_k, \quad u \in Z_k, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad j \in \{1, \dots, C_k\} \quad (3.13)$$

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{C_k} \sum_{g \in \Omega_i} \sum_{p \in X_{igk}} \sum_{q \in Y_{igk}} \sum_{r \in Z_{igk}} x_{ig}^{jkpqr} \leq b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (3.14)$$

$$x_{ig}^{jkpqr} \in \{0, 1\}, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad g \in \Omega_i, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \\ j \in \{1, \dots, C_k\}, \quad p \in X_{igk}, \quad q \in Y_{igk}, \quad r \in Z_{igk}. \quad (3.15)$$

A função objetivo (3.12) maximiza o volume (ou valor associado) dos itens carregados nos contêineres disponíveis. As restrições (3.13) exigem que os itens sejam carregados sem sobreposição, isto é, um ponto  $(s, t, u)$  é ocupado por no máximo uma caixa, enquanto as restrições (3.14) garantem que, no máximo, todas as caixas do tipo  $i$  sejam carregadas. Por fim, as restrições (3.15) impõem o domínio das variáveis de decisão.

As formulações para problemas de maximização (do valor) das saídas, tal como no caso de minimização (do valor) das entradas, são indiferentes à heterogeneidade das caixas e dos contêineres, e podem, portanto, ser usadas para resolver todos os tipos de problemas de maximização (do valor) das saídas com mais de um contêiner disponível. No entanto, pelas mesmas razões descritas na Seção 3.2, a formulação (3.12)–(3.15) ajusta-se melhor à resolução do MHLOPP e, se há apenas um tipo de contêiner (isto é,  $\mathcal{K} = 1$ ), do MILOPP.

### 3.4 CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS

Nesta Seção são apresentadas estratégias para tratar de considerações práticas comuns em situações cotidianas. Tais restrições são a separação de caixas, apresentada na Seção 3.4.1, e a estabilidade da carga, na Seção 3.4.2. Abordagens para a consideração prática de orientação das caixas, descritas como um dos objetivos

deste trabalho, foram incorporadas aos modelos (3.7)–(3.10) e (3.12)–(3.15), utilizando a estratégia apresentada na Seção 3.1.

### 3.4.1 Separação de caixas

De acordo com Bischoff e Ratcliff (1995), exigências de separação de caixas estão relacionadas a itens que não podem ser carregados lado a lado, devendo existir um espaço entre tais caixas quando as mesmas são carregadas em um mesmo contêiner. Eley (2003) define como itens conflitantes caixas não podem ser carregadas no mesmo contêiner. Neste trabalho, ao se referir a restrição de separação de caixas, adotou-se a definição de Eley (2003), isto é, entende-se que itens que devem ser separados serão, obrigatoriamente, carregados em contêineres distintos.

A formulação proposta para esta restrição considera  $B_1$  e  $B_2$  dois conjuntos com tipos de itens conflitantes, isto é, cada tipo de caixa em  $B_1$  não pode ser carregado no mesmo contêiner que as caixas do conjunto  $B_2$ . Situações práticas envolvendo tal exigência ocorrem quando é necessário carregar contêineres com produtos alimentícios e produtos químicos, ou na separação de itens refrigerados/congelados de carga comum. Variáveis binárias  $z_{\gamma jk}$ , com  $\gamma \in B_1 \cup B_2$ ,  $j \in \{1, \dots, C_k\}$  e  $k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}$ , assumem valor 1 se as caixas do tipo  $\gamma$ , com disponibilidade  $b_\gamma$ , são alocadas no  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$ , e 0 caso contrário.

Para considerar a exigência de separação de caixas, as seguintes restrições devem ser acrescentadas às formulações apresentadas nas seções anteriores, para cada  $\gamma \in B_1 \cup B_2$ :

$$\sum_{g \in \Omega_\gamma} \sum_{p \in X_{\gamma g k}} \sum_{q \in Y_{\gamma g k}} \sum_{r \in Z_{\gamma g k}} x_{\gamma g}^{jkpqr} \leq b_\gamma z_{\gamma jk}, \quad \forall \gamma \in B_1 \cup B_2, \quad B_1 \subset \{1, \dots, m\},$$

$$B_2 \subset \{1, \dots, m\}, \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad j \in \{1, \dots, C_k\}. \quad (3.16)$$

A garantia de que caixas do tipo  $\theta \in B_1$  não são carregadas nos mesmos contêineres do que as caixas do tipo  $\mu \in B_2$  é dada pelas seguintes restrições, que também devem ser adicionadas às formulações:

$$z_{\theta jk} + z_{\mu jk} \leq 1, \quad \theta \in B_1, \quad \mu \in B_2, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad j \in \{1, \dots, C_k\} \quad (3.17)$$

$$z_{\gamma jk} \in \{0, 1\}, \quad z_{\theta jk} \in \{0, 1\}, \quad z_{\mu jk} \in \{0, 1\}, \quad \gamma \in B_1 \cup B_2, \quad \theta \in B_1, \quad \mu \in B_2. \quad (3.18)$$

Cabe ressaltar que as restrições (3.17) podem ser ajustadas para problemas de minimização (do valor) das entradas substituindo-se a constante do lado direito

da desigualdade pela variável  $e_{jk}$ , definida em (3.10), uma vez que, dessa maneira, a restrição será considerada apenas se o contêiner for utilizado. Destaca-se também que a formulação (3.16)–(3.18) pode ser estendida para qualquer número finito de conjuntos de itens que devem ser carregados em contêineres distintos.

### 3.4.2 Estabilidade da carga

A estabilidade é uma das considerações práticas mais importantes que podem ser incorporadas no problema de carregamento de contêineres, pois padrões de carregamento estáveis previnem danos aos itens durante o transporte dos mesmos e também aumentam a segurança dos operadores responsáveis pelos procedimentos de carga e descarga. De acordo com Bortfeldt e Wäscher (2013), há duas variações do conceito de estabilidade de caixas: a estabilidade vertical (ou estática), que ocorre quando os itens resistem à ação da força de gravidade (isto é, não “caem” em direção ao piso do contêiner); e a estabilidade horizontal (ou dinâmica), quando as caixas não tem suas posições alteradas quando o contêiner é movido horizontalmente (quando um caminhão inicia uma viagem, por exemplo). As formulações apresentadas neste trabalho tratam apenas da restrição de estabilidade vertical. Desse modo, por simplicidade, tal consideração prática será denominada apenas como estabilidade ao longo do texto.

Uma maneira de abordar o requerimento de estabilidade estática consiste em determinar um percentual mínimo da base de cada caixa que deve, obrigatoriamente, ser apoiado pelo contêiner ou por outras caixas. O coeficiente de estabilidade  $\alpha$  indica a área mínima de cada item que deve ser apoiada. Se por um lado  $\alpha = 1$  exige que 100% da base das caixas tenham suporte de outros itens, quando  $\alpha = 0$ , não há necessidade das caixas estarem apoiadas, isto é, os itens podem estar parcialmente suportados ou mesmo “flutuando” dentro dos contêineres.

Para se considerar a restrição de estabilidade, as seguintes restrições devem ser adicionadas às formulações (3.7)–(3.10) e (3.12)–(3.15), ressaltando que as restrições a seguir também são válidas quando há apenas um tipo de contêiner, tomando-se  $\mathcal{K} = 1$ :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{g \in \Omega_i | r' - h_{ig} \geq 0\}} \sum_{\{p \in X_{igk} | p' - l_{ig} + 1 \leq p \leq p' + l_{\lambda a} - 1\}} \sum_{\{q \in Y_{igk} | q' - w_{ig} + 1 \leq q \leq q' + w_{\lambda a} - 1\}} L_{i\lambda} W_{i\lambda} x_{ig}^{jkpq(r' - h_{ig})} \geq \alpha l_{\lambda a} w_{\lambda a} x_{\lambda a}^{jkp'q'r'}$$

$$\lambda \in \{1, \dots, m\}, \quad a \in \Omega_{\lambda}, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad j \in \{1, \dots, C_k\},$$

$$p' \in X_{\lambda ak}, \quad q' \in Y_{\lambda ak}, \quad r' \in Z_{\lambda ak} \quad (3.19)$$

com

$$L_{i\lambda} = \min(p + l_{ig}, p' + l_{\lambda a}) - \max(p, p') \quad (3.20)$$

e

$$W_{i\lambda} = \min(q + w_{ig}, q' + w_{\lambda a}) - \max(q, q'). \quad (3.21)$$

As expressões (3.19)–(3.21), adaptadas de Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b), garantem que um percentual mínimo de suporte  $\alpha$  para a base de uma caixa do tipo  $\lambda$  posicionada no ponto  $(p', q', r')$  do  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$ . Tal suporte é dado por uma caixa do tipo  $i$  (inclusive  $i = \lambda$ ) alocada no ponto  $(p, q, r)$  de um contêiner, com  $r = r' - h_{ig}$ .

Cabe destacar que, embora o parâmetro  $\alpha$  determine o percentual mínimo de apoio da área da base das caixas, tal abordagem não garante estabilidade da carga quando a mesma é sujeita a ação de forças externas tais como velocidade, aceleração e oscilações do veículo (RAMOS; SILVA; OLIVEIRA, 2018).

### 3.5 BOUNDS PARA PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS ENTRADAS

Nesta Seção, descreve-se como foram obtidos *bounds* para problemas de minimização (do valor) das entradas. *Bounds* não são necessários para problemas de maximização (do valor) das saídas, visto que estes problemas já possuem um número limitado de contêineres disponíveis. Técnicas para obtenção de *upper bounds* são descritas na Seção 3.5.1, enquanto um método para cálculo de *lower bounds* é descrito na Seção 3.5.2.

#### 3.5.1 Upper bound

Em problemas de minimização (do valor) das entradas, em geral assume-se que há um número ilimitado de contêineres disponíveis para alocar as caixas. Para obter um *bound* trivial para o problema, basta considerar o número de cada tipo de contêiner igual ao número de itens a serem carregados. Para obtenção de formulações matemáticas eficientes, é essencial a obtenção de *bounds* ajustados ao problema, de modo a se obter modelos com menor número de variáveis e restrições (BOSCHETTI; MINGOZZI; HADJICONSTANTINOU, 2002).

##### 3.5.1.1 Upper bound sem considerações práticas

Para obtenção de um *upper bound* para o problema, resolveu-se um problema de particionamento de conjuntos, cujo objetivo é minimizar o número de contêineres

necessários para carregar todas as caixas. De modo similar a abordagem de Zhu, Huang e Lim (2012), padrões de carregamento foram utilizados como colunas para o problema de particionamento de conjuntos, mas ao invés do procedimento de geração de protótipos de colunas utilizado pelos autores citados anteriormente, neste trabalho utilizou-se duas técnicas de construção de carregamentos por camadas: a heurística G&R de George e Robinson (1980) e uma variação da heurística GRMod de Moura e Oliveira (2005).

Originalmente concebida para problemas de carregamento com um único contêiner, a heurística G&R preenche um contêiner particionando-o em camadas, que por sua vez serão compostas por pilhas de caixas idênticas. A profundidade de cada camada é definida pelo primeiro item alocado na camada; George e Robinson (1980) apresentam três critérios para escolha de tal caixa. Tais regras devem ser aplicadas sequencialmente, isto é, o próximo critério somente é escolhido caso duas ou mais caixas atendam o critério anterior: (i) selecionar a caixa que possui a maior entre as menores dimensões; (ii) selecionar o item com a maior quantidade disponível; (iii) selecionar a caixa com a maior dimensão.

Durante o procedimento de carregamento do contêiner, é possível que o tipo de caixa escolhido não possua disponibilidade suficiente para preencher uma camada completa ou que o item não possa ser colocado em um espaço remanescente na camada. Situações como essa levam à geração de novos espaços no interior de um contêiner, conforme mostra a FIGURA 6: um espaço de profundidade (em frente a camada), um espaço de largura (ao lado da camada), e um espaço de altura (no topo da camada). Estes espaços devem ser preenchidos na ordem reversa com a qual foram criados, isto é, deve-se primeiro tentar preencher o espaço da altura, seguido pelo espaço da largura e, por fim, o espaço de profundidade. Há a possibilidade desses espaços serem insuficientes para alocação de qualquer tipo de caixa durante o preenchimento de uma camada. Ainda assim, estes espaços são armazenados em uma lista de espaços temporariamente rejeitados, uma vez que podem ser combinados com outros espaços não preenchidos durante o processo de carregamento de uma nova camada, gerando, desse modo, um padrão de carregamento mais denso.

Para geração de padrões de carregamento factíveis aos problemas de minimização (do valor) das entradas abordados neste trabalho, a heurística G&R foi aplicada sequencialmente, para cada tipo de contêiner, atualizando a disponibilidade das caixas à medida que cada contêiner foi preenchido. Uma desvantagem da utilização dessa técnica reside no fato de que, embora os primeiros contêineres tendam a estar quase totalmente carregados, os últimos podem ter uma razão de ocupação muito baixa. Isso ocorre principalmente devido a diminuição do número de caixas disponíveis para carregamento e pela necessidade de escolher as caixas que serão utilizadas para cons-



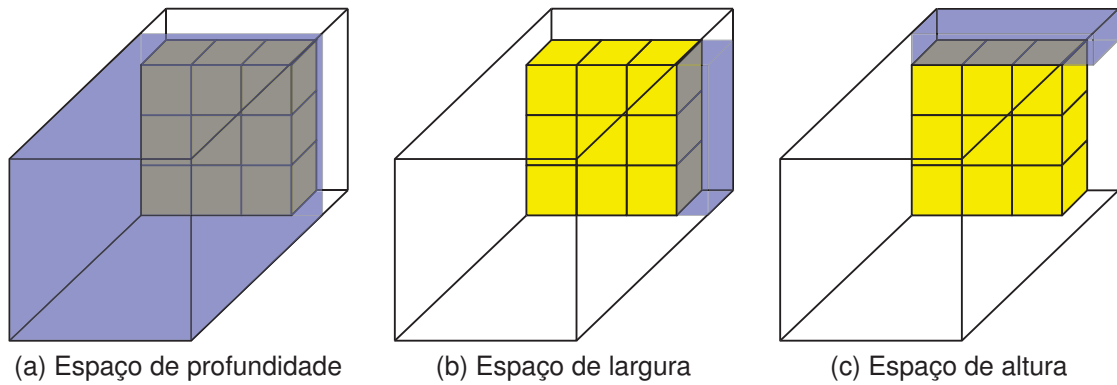


FIGURA 6 – Espaços gerados na heurística G&amp;R

FONTE: o autor (2020).

trução das camadas de acordo com os critérios originalmente propostos por George e Robinson (1980).

Para obter diferentes padrões de carregamento com alta qualidade para o problema de particionamento de conjuntos, este trabalho propõe uma variação da heurística GRMod de Moura e Oliveira (2005). Sendo ela mesma uma variação da G&R, a GRMod é uma heurística de duas fases originalmente empregada para problemas com um único tipo de contêiner disponível: inicialmente, na fase construtiva, um padrão de carga é obtido; em seguida, na fase de melhoria, uma técnica de busca local é utilizada para aprimorar a solução. Na geração do padrão de carregamento, os critérios de escolha de caixas da heurística G&R são desprezados por Moura e Oliveira (2005), e a escolha do tipo de caixa que será usada para criação de uma nova camada ou para o preenchimento de um espaço gerado é feita com base em um lista restrita de candidatos. As caixas que farão parte de tal lista são escolhidas de acordo com a seguinte expressão:

$$\mathcal{T} = Vol_{max} + \eta(Vol_{min} - Vol_{max}), \quad (3.22)$$

onde  $\mathcal{T}$  é um limite de utilização de volume,  $Vol_{max}$  e  $Vol_{min}$  são, respectivamente, o volume máximo e mínimo que podem ser usados nos arranjos que podem ser obtidos com as caixas disponíveis para carregamento, e  $\eta$  é um parâmetro que determina o nível de aleatoriedade do algoritmo: se  $\eta = 1$ , as caixas são escolhidas de modo aleatório, enquanto se  $\eta = 0$ , a escolha dos itens assume um comportamento ganancioso.

Para o problema de particionamento de conjuntos utilizado neste trabalho, deve-se construir um grande número de padrões de carregamento distintos, visando ampliar a possibilidade de obtenção de boas soluções. Visto que a heurística GRMod tem características aleatórias, cada execução da mesma pode gerar um padrão de



carregamento diferente. Uma diferença fundamental na abordagem utilizada neste trabalho diz respeito ao modo como a fase de construção é efetuada na heurística GRMod: enquanto Moura e Oliveira (2005) obtém uma solução e depois executam uma fase de melhoria, neste trabalho a fase construtiva é executada múltiplas vezes, para cada tipo de contêiner, armazenando os diferentes padrões de carregamento obtidos. Diferentes listas restritas de candidatos, determinadas com valores distintos de  $\eta$ , geram uma grande variedade de padrões de carregamento.

Uma das vantagens das estratégias de obtenção de padrões de carregamento delineadas anteriormente consiste no fato de que, além do número de cada tipo de caixa carregado em um contêiner, as heurísticas determinam padrões de carregamento reais, com um arranjo factível de caixas dentro de um contêiner, fornecendo informações importantes que para serem utilizadas em conjunto com os modelos matemáticos apresentados neste trabalho.

Depois da execução das estratégias descritas anteriormente, são obtidos  $\mathcal{P}_k$  padrões de carregamento distintos para cada contêiner do tipo  $k$ . O número de caixas carregadas em cada padrão constitui um vetor coluna  $y$ , cujos elementos  $y_{jk}^i$  indicam o número de caixas do tipo  $i$  no  $j$ -ésimo padrão de carregamento construído utilizando um contêiner do tipo  $k$ . Assim, tem-se a seguinte formulação para o problema de particionamento de conjuntos:

$$\min \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{P}_k} V_k \delta_{jk} \quad (3.23)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{P}_k} y_{jk}^i \delta_{jk} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.24)$$

$$y_{jk}^i \in \{0, \dots, b_i\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, \mathcal{P}_k\}, \\ \forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad \delta_{jk} \in \mathbb{N}. \quad (3.25)$$

A função objetivo (3.23) minimiza o volume necessário para empacotar todo o conjunto de caixas. As variáveis  $\delta_{jk}$  indicam o número de vezes que um padrão de carga é selecionado; desse modo, por meio da resolução de (3.23)–(3.25), um *upper bound*  $\mathcal{U}$  para o problema de minimização (do valor) das entradas sem a adição de restrições práticas é obtido.

Além disso, as expressões (3.23)–(3.25) podem ser empregadas para obtenção de um *upper bound*  $\mathcal{U}_k$  de um contêiner do tipo  $k$  se as seguintes modificações forem efetuadas:

$$\min \sum_{j=1}^{\mathcal{P}_k} \delta_{jk} \quad (3.26)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{P}_k} y_{jk}^i \delta_{jk} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.27)$$

$$y_{jk}^i \in \{0, \dots, b_i\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, \mathcal{P}_k\} \quad \delta_{jk} \in \mathbb{N}, \quad (3.28)$$

onde a função objetivo (3.26) representa o número máximo de contêineres do tipo  $k$  necessários para carregar as caixas.

### 3.5.1.2 *Upper bound* com estabilidade da carga

Uma das principais alterações feitas por Moura e Oliveira (2005) em relação a heurística G&R diz respeito a um novo esquema de geração do espaço da altura de uma camada de caixas, visando obter padrões de carregamento estáveis. Se nenhuma caixa possui dimensões adequadas para ser alocada do espaço da largura, a heurística GRMod restringe o espaço da altura de modo a considerar apenas o espaço acima das camadas já colocadas no interior do contêiner. Para obtenção de padrões de carregamento com estabilidade, este conceito é utilizado, neste trabalho, não apenas na variação da GRMod proposta da Seção anterior, mas também na aplicação sequencial da heurística G&R para a obtenção de *upper bounds* para problemas com estabilidade da carga.

### 3.5.1.3 *Upper bound* com separação de caixas

Para considerar a restrição de separação de caixas, utilizam-se as heurísticas G&R e a variação da heurística GRMod com os tipos de caixas conflitantes em dois conjuntos disjuntos,  $B_1$  e  $B_2$ . Então, aplica-se a heurística de obtenção do *upper bound* em duas etapas: primeiro, considerando-se apenas caixas que não pertencem ao conjunto  $B_1$ . Na sequência, o processo é repetido, desta vez utilizando apenas caixas que não pertencem a  $B_2$ . Se  $\mathcal{P}'_k$  e  $\mathcal{P}''_k$  são os padrões de carga obtidos nas duas etapas efetuadas, então há  $|\mathcal{P}_k| = |\mathcal{P}'_k \cup \mathcal{P}''_k|$  padrões de carregamento distintos, e o *upper bound* é determinado resolvendo-se (3.23)–(3.25) e (3.26)–(3.28).

### 3.5.2 Lower bound

Para obter um *lower bound* geral  $\mathcal{L}$  para o problema considerando apenas suas características básicas, resolve-se um modelo matemático sem as restrições de não sobreposição; efetivamente, essa tática reduz o problema de carregamento tridimensional a um problema de *bin packing* unidimensional. Esse é um tipo de abordagem clássica para obtenção de um *lower bound* válido para o problema de carregamento de contêineres, usado, entre outros, por Zhu, Huang e Lim (2012). As variáveis de decisão  $\bar{e}_{jk}$  são iguais a 1 se o  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$  é utilizado e 0 caso contrário, e  $\bar{y}_{ijk}$ , que indica o número de caixas do tipo  $i$  carregadas no  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$ . A formulação é dada pelas seguintes expressões:

$$\min \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{U}_k} V_k \bar{e}_{jk} \quad (3.29)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i \bar{y}_{ijk} \leq V_k \bar{e}_{jk}, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad j \in \{1, \dots, \mathcal{U}_k\} \quad (3.30)$$

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^{\mathcal{U}_k} \bar{y}_{ijk} = b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (3.31)$$

$$\bar{y}_{ijk} \in \mathbb{N}, \quad \bar{e}_{jk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, \mathcal{U}_k\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}. \quad (3.32)$$

No modelo acima, a função objetivo (3.29) determina o volume mínimo necessário para empacotar as caixas. As restrições (3.30) garantem que o volume dos itens carregados no  $j$ -ésimo contêiner do tipo  $k$  não excede a capacidade volumétrica do contêiner, enquanto as expressões (3.31) garantem que todas as caixas são carregadas. As restrições (3.32) apresentam o domínio das variáveis de decisão. O *lower bound* calculado também é válido para problemas com a consideração prática de estabilidade, uma vez que as expressões apresentadas levam em conta apenas as características volumétricas das caixas e dos contêineres.

A formulação (3.29)–(3.32) pode ser estendida para obtenção de um *lower bound* válido considerando a restrição de separação de caixas, por meio da adição das seguintes expressões:

$$\bar{y}_{\gamma jk} \leq b_{\gamma} \bar{z}_{\gamma jk}, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad j \in \{1, \dots, \mathcal{U}_k\}, \quad \gamma \in B_1 \cup B_2 \quad (3.33)$$

$$\bar{z}_{\theta jk} + \bar{z}_{\mu jk} \leq \bar{e}_{jk}, \quad \theta \in B_1, \quad \mu \in B_2, \quad \forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, \mathcal{U}_k\} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\theta jk} \in \{0, 1\}, \quad \bar{z}_{\mu jk} \in \{0, 1\}, \quad \bar{z}_{\gamma jk} \in \{0, 1\}, \\ \bar{y}_{\gamma jk} \in \mathbb{N}, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}, \quad j \in \{1, \dots, \mathcal{U}_k\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

As restrições (3.33)–(3.35) têm interpretação similar às aquelas apresentadas em (3.16)–(3.18).

A formulação dada por (3.29)–(3.32) pode ser adaptada para obtenção de um *lower bound*  $\mathcal{L}_k$  para um contêiner do tipo  $k$  da seguinte maneira:

$$\min \sum_{j=1}^{\mathcal{U}_k} \bar{e}_{jk} \quad (3.36)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i \bar{y}_{ijk} \leq V_k \bar{e}_{jk}, \quad j \in \{1, \dots, \mathcal{U}_k\} \quad (3.37)$$

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{U}_k} \bar{y}_{ijk} = b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (3.38)$$

$$\bar{y}_{ijk} \in \mathbb{N}, \quad \bar{e}_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad j \in \{1, \dots, \mathcal{U}_k\}, \quad k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}. \quad (3.39)$$

A função objetivo (3.36) representa o número mínimo de contêineres do tipo  $k$  necessários para empacotar os itens.

Em problemas do tipo SSSCSP, uma vez que  $\mathcal{K} = 1$ , isto é, há apenas um único tipo de contêiner, se  $\mathcal{L}_k \leq \mathcal{U}_k$ , pode-se atribuir valor 1 para todas as variáveis  $e_{jk}$ ,  $j \in \{1, \dots, \mathcal{L}_k\}$ , cabendo à formulação matemática a minimização do uso das variáveis remanescentes e a garantia de que o arranjo das caixas no interior dos contêineres é factível. Desse modo, reduz-se consideravelmente o esforço computacional necessário para a resolução dos modelos. Finalmente, é importante salientar que se um padrão de carga é conhecido e  $\mathcal{L}_k = \mathcal{U}_k$ , tem-se a solução ótima para ambos os tipos de problemas de minimização (do valor) das entradas abordados neste trabalho.

### 3.5.3 Estratégia para resolução de problemas de minimização (do valor) das entradas

As etapas para a solução de um problema de minimização (do valor) das entradas são apresentadas no Algoritmo 1. O processo inicia-se com o cálculo do

*upper* e do *lower bound* para o problema, utilizando a estratégia apropriada, de acordo com as considerações práticas abordadas (linhas 1-2). Então, é feita a comparação entre os *bounds*: se eles possuem o mesmo valor, tem-se a solução ótima do problema (linha 4); caso contrário, se o problema abordado é do tipo SSSCSP (linha 6), gera-se o modelo matemático, utilizando  $\mathcal{U}_k - 1$  como número de contêineres disponível (linha 7), atribui-se às variáveis  $e_{jk}$  com índice  $k$  menor ou igual ao *lower bound*  $\mathcal{L}_k$  o valor 1 (linha 9), e adicionam-se restrições de quebra de simetria (linha 10). Se o modelo é infactível, conclui-se que o *upper bound*  $\mathcal{U}_k$  consiste na solução ótima do problema (linha 13); do contrário, a resolução do modelo fornece a solução do problema tratado (linha 15). Se o problema abordado é do tipo MSSSCP (linha 17), gera-se o modelo matemático, usando  $\mathcal{U}_k$  como número de contêineres disponíveis (linha 19), adicionam-se restrições de quebra de simetria (linha 22), e procede-se à resolução do modelo.

---

**Algoritmo 1** Estratégia de resolução dos problemas de minimização (do valor) das entradas

---

```

1: Calcular os upper bounds  $\mathcal{U}_k$  para cada  $k$ , e o upper bound geral  $\mathcal{U}$ 
2: Calcular os lower bounds  $\mathcal{L}_k$  para cada  $k$ , e o lower bound geral  $\mathcal{L}$ 
3: se  $\mathcal{L} = \mathcal{U}$  então
4:   Solução ótima encontrada
5: senão
6:   se  $\mathcal{K} = 1$  então
7:      $C_k \leftarrow \mathcal{U}_k - 1$ 
8:     Gerar o modelo
9:     Atribuir  $e_{jk} = 1, j \in \{1, \dots, \mathcal{L}_k\}$ 
10:    Adicionar restrições de quebra de simetria  $e_{jk} \leq e_{(j-1)k}, \forall j \in \{\mathcal{L}_k + 1, \dots, C_k\}$ 
11:    Resolver o modelo
12:    se o modelo é infactível então
13:      O upper bound  $\mathcal{U}_k$  é a solução ótima
14:    senão
15:      A solução do modelo é factível
16:    fim se
17:  senão
18:    para cada  $k$  faça
19:       $C_k \leftarrow \mathcal{U}_k$ 
20:    fim para
21:    Gerar o modelo
22:    Adicionar restrições de quebra de simetria  $e_{jk} \leq e_{(j-1)k}, \forall j \in \{1, \dots, C_k\}$ 
23:    Resolver o modelo
24:  fim se
25: fim se

```

---

## 4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste Capítulo são descritos os experimentos computacionais realizados para avaliar o desempenho dos métodos apresentados no Capítulo anterior. Para analisar os algoritmos propostos neste trabalho, foram utilizados conjuntos de dados da literatura de carregamento de contêineres, tanto para problemas de minimização (do valor) das entradas quanto para problemas de maximização (do valor) das saídas. Todos os modelos e técnicas de resolução foram implementados em C++, e cada instância foi resolvida em computadores com processadores Xeon com 2.77GHz, 4 *threads* e até 120GB de RAM. Um limite de tempo de 3600 segundos foi estabelecido para cada teste. Os modelos matemáticos foram resolvidos usando Gurobi 8.1.0 com parâmetros padrão (GUROBI, 2019).

Para obter os *upper bounds*, foram criadas colunas para o problema de particionamento de conjuntos aplicando a heurística G&R de modo sequencial. Depois desse procedimento, mais colunas foram criadas por meio da adaptação da heurística GRMod apresentada na Seção 3.5.1, com parâmetros  $\eta = 0$ ,  $\eta = 0,5$  e  $\eta = 1$ . Como critério de parada, foi estabelecido um limite de tempo de 15 segundos ou um máximo de 100 mil execuções para cada parâmetro.

Na Seção 4.1, descreve-se as instâncias utilizadas e as técnicas de resolução clássicas da literatura com as quais as abordagens apresentadas neste trabalho foram comparadas. Na Seção 4.2, apresenta-se uma breve discussão a respeito das técnicas de discretização utilizadas na geração dos modelos. Na Seção 4.3, detalham-se os resultados obtidos para problemas de minimização (do valor) das entradas, seguidos pelos resultados para problemas de maximização (do valor) das saídas na Seção 4.4.

### 4.1 INSTÂNCIAS

Cinco conjuntos de testes foram usados para avaliar as formulações propostas neste trabalho. Inicialmente, para analisar o impacto das discretizações, a quantidade de contêineres foi restrita, visando resolver problemas com um único contêiner com as instâncias propostas por Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b) para o IIPP, SLOPP e SKP. Composto por 320 problemas, esse conjunto de testes é dividido em dois grupos, denominados  $A_m$  e  $B_m$ , onde  $m \in \{1, 5, 10, 20\}$  representa o número de tipos de caixas. Em ambos os grupos, as dimensões das caixas foram determinadas aleatoriamente como uma fração das dimensões do contêiner (entre 25% e 75% das dimensões do contêiner para o grupo  $A_m$ , e entre 10% e 50% para o grupo  $B_m$ ). Os contêineres possuem formato cúbico, com dimensões de 10, 20, 30, 50, e 100 para

o grupo  $A_m$ , e 10, 20, e 30 no grupo  $B_m$ . Nesse conjunto de instâncias, as caixas possuem orientação fixa, exceto se  $m = 1$ , quando rotações são permitidas. Além dos testes com as instâncias originais de Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b), também foram efetuados testes em uma estrutura mais generalizada, permitindo que as caixas assumam até seis orientações para melhor avaliar as metodologias propostas.

Para problemas de minimização (do valor) das entradas, foram utilizadas as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989). Para o MSSCSP, o conjunto de dados é composto por 17 instâncias, variando de 47 a 180 caixas. O número de contêineres disponíveis em cada instância varia de entre duas e três unidades. O objetivo dos problemas é determinar o volume mínimo necessário para carregar todo o conjunto de caixas. Diferentes métodos já foram propostos na literatura para resolver estes problemas, e as formulações propostas neste trabalho serão comparadas com as seguintes técnicas:

- IVA: heurística baseada em programação inteira de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989);
- BOR: critérios heurísticos para seleção de caixas e contêineres de Bortfeldt (2000);
- ELY: processo de geração de colunas e programação inteira de Eley (2003);
- TAK: estratégia de busca local de Takahara (2008);
- REN: procedimento de geração de colunas de Ren, Tian e Sawaragi (2011a).

As 17 instâncias do MSSCSP servem de base para a geração de 47 problemas para o SSSCSP, obtidos por um processo de decomposição das instâncias originais por contêineres, isto é, um problema do MSSCSP com três contêineres dá origem a três novas instâncias para o SSSCSP, cada uma com um único tipo de contêiner e com o mesmo conjunto de caixas do problema inicial. O objetivo é determinar o menor número de contêineres necessários para carregar todas as caixas. Além das técnicas citadas anteriormente, que também apresentam abordagens de resolução para o SSSCSP, os algoritmos apresentados nesse trabalho foram comparados com as seguintes estratégias de resolução:

- LZG: heurística gananciosa de Lim e Zhang (2005);
- CHE: técnica de geração de colunas de Che et al. (2011);
- LIM: heurística de busca em árvore de Lim et al. (2012);
- ZHU: procedimento de geração de colunas de Zhu, Huang e Lim (2012).



É importante destacar que os métodos apresentados por Zhu, Huang e Lim (2012) e Eley (2003) também tratam de restrições práticas de carregamento — a primeira abordagem considera a estabilidade da carga para o SSSCSP, enquanto a segunda aborda a separação de caixas no SSSCSP. Além disso, para o SSSCSP, a heurística de busca em árvore com carregamento sequencial e a heurística de busca em árvore com carregamento paralelo de Eley (2002), denotadas neste trabalho como ELS e ELP, respectivamente, também serão usadas para comparação de resultados em casos com estabilidade da carga.

Para problemas de maximização (do valor) das saídas com múltiplos contêineres, foram utilizadas as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994). Para o MHLOPP, o conjunto de dados é composto por 16 problemas, que possuem de dois a seis tipos de caixas, com disponibilidade variando de 47 a 200 itens, e com dois a três tipos diferentes de contêineres, com disponibilidade variando de dois a 15 contêineres. O objetivo é maximizar o valor associado à carga. Como nos problemas abordados anteriormente, as técnicas de resolução para o MHLOPP apresentadas neste trabalho foram comparadas com as seguintes abordagens da literatura:

- MOH: estratégia de solução sequencial utilizando geração de colunas de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994);
- BOR: critérios heurísticos para seleção de caixas e contêineres de Bortfeldt (2000);
- ELY: processo de geração de colunas e programação inteira de Eley (2003);
- TAK: estratégia de busca local de Takahara (2008);
- REN: procedimento de geração de colunas de Ren, Tian e Sawaragi (2011a).

O trabalho de Eley (2003) também aborda a restrição de separação de caixas para o MHLOPP e, portanto, será usado para comparação de resultados quando esta consideração prática for tratada neste tipo de problema.

Como não há instâncias para o MILOPP disponíveis na literatura de carregamento de contêineres, o conjunto de testes proposto por Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) para o MHLOPP foi utilizado para gerar 42 problemas para o MILOPP, de modo similar ao empregado por Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) para obter as instâncias do SSSCSP. Uma vez que no MILOPP o número de contêineres é dado, determinou-se que, nas instâncias geradas, o número de contêineres de cada problema seria igual a disponibilidade máxima do problema original, sendo que nenhuma instância possui menos do que dois contêineres.



Adotou-se o parâmetro de estabilidade  $\alpha = 1$  na resolução de todos os problemas com esta restrição, e exigiu-se que caixas do tipo 1 e 2 fossem carregadas em contêineres distintos nos cenários com consideração prática de separação de caixas, para permitir a comparação dos resultados deste trabalho com as abordagens de Eley (2003).

## 4.2 COMPARAÇÃO DAS TÉCNICAS DE DISCRETIZAÇÃO

Para avaliar as técnicas de discretização apresentadas na Seção 3.1, inicialmente foram resolvidos os problemas de carregamento envolvendo um único contêiner propostos por Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b). Para tanto, o número de contêineres, o número de tipos de contêineres e as orientações que uma caixa pode assumir foram restritos na formulação matemática dada por (3.12)–(3.15). Neste trabalho, os mesmos problemas também foram resolvidos permitindo-se que as caixas assumissem até seis orientações. Por fim, considerou-se também o requerimento de estabilidade da carga, dado pela restrição (3.19), com parâmetro de estabilidade  $\alpha = 1$ .

Nesta Seção, serão apresentados apenas os resultados para o problema definido por (3.12)–(3.15). No entanto, os resultados para diferentes cenários, com diferentes discretizações, para cada problema resolvido, encontram-se disponíveis para consulta on-line na página <https://tinyurl.com/resultadosCLP>. A TABELA 1 apresenta o número mínimo, médio, máximo e total de variáveis e restrições obtidas para as instâncias de Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b) em todas as diferentes discretizações apresentadas neste trabalho, considerando um contêiner com dimensões  $L = W = H = 10$ . A TABELA 1 também apresenta dados a respeito dos modelos obtidos utilizando a discretização unitária (UN).

Embora as discretizações NP e RNP gerem resultados similares em termos de número de variáveis e de restrições, o RNP apresenta valores ligeiramente menores do que o NP. O RRP e o MiM puderam, nas instâncias utilizadas, gerar modelos matemáticos menores do que todas as outras discretizações avaliadas. Embora as diferenças entre as estatísticas apresentadas para o RRP para o MiM sejam pequenas em comparação com o NP, em alguns casos essas discretizações podem obter modelos com 66,36% menos variáveis e 85,32% menos restrições do que os modelos equivalentes gerados usando o NP. Em comparação com a UN, as reduções são ainda mais significantes — em alguns casos, resultando em modelos com 99% menos variáveis e restrições. Resultados similares são observados utilizando as discretizações apresentadas neste trabalho com as instâncias usadas para o MILOPP, MHLOPP, SSSCSP, e MSSCSP, como mostra a TABELA 2.

Analisando as tabelas, é possível observar que, embora os modelos obtidos com o RNP sempre apresentem mais restrições e variáveis do que aqueles gerados

TABELA 1 – Comparação entre as discretizações para as instâncias de Junqueira, Morabito e Yamashita (2012b) com  $L = W = H = 10$ 

		UN		NP		RRP		RNP		MiM	
		Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições
$A_1$	Min.	600,00	344,00	36,00	28,00	<b>24,00</b>	<b>9,00</b>	36,00	28,00	36,00	28,00
	Média	1430,40	561,20	326,10	142,50	<b>313,20</b>	<b>127,90</b>	326,10	142,50	316,20	129,80
	Max.	2160,00	730,00	<b>1344,00</b>	<b>513,00</b>	<b>1344,00</b>	<b>513,00</b>	<b>1344,00</b>	<b>513,00</b>	<b>1344,00</b>	<b>513,00</b>
	Soma	14304,00	5612,00	3261,00	1425,00	<b>3132,00</b>	<b>1279,00</b>	3261,00	1425,00	3162,00	1298,00
$A_5$	Min.	1294,00	509,00	<b>293,00</b>	145,00	<b>293,00</b>	<b>125,00</b>	<b>293,00</b>	145,00	<b>293,00</b>	<b>125,00</b>
	Média	1603,40	598,00	570,80	255,00	541,10	228,20	569,00	251,80	<b>539,30</b>	<b>225,00</b>
	Max.	2283,00	734,00	<b>1236,00</b>	453,00	<b>1236,00</b>	<b>389,00</b>	<b>1236,00</b>	453,00	<b>1236,00</b>	<b>389,00</b>
	Soma	16034,00	5980,00	5708,00	2550,00	5411,00	2282,00	5690,00	2518,00	<b>5393,00</b>	<b>2250,00</b>
$A_{10}$	Min.	3076,00	658,00	1326,00	330,00	<b>1284,00</b>	<b>298,00</b>	1326,00	330,00	<b>1284,00</b>	<b>298,00</b>
	Média	3467,10	730,90	1954,40	472,40	<b>1930,00</b>	<b>454,80</b>	1954,40	472,40	<b>1930,00</b>	<b>454,80</b>
	Max.	4002,00	739,00	<b>2397,00</b>	<b>522,00</b>	<b>2397,00</b>	<b>522,00</b>	<b>2397,00</b>	<b>522,00</b>	<b>2397,00</b>	<b>522,00</b>
	Soma	34671,00	7309,00	19544,00	4724,00	<b>19300,00</b>	<b>4548,00</b>	19544,00	4724,00	<b>19300,00</b>	<b>4548,00</b>
$A_{20}$	Min.	6366,00	749,00	<b>3948,00</b>	<b>532,00</b>	<b>3948,00</b>	<b>532,00</b>	<b>3948,00</b>	<b>532,00</b>	<b>3948,00</b>	<b>532,00</b>
	Média	7063,20	749,00	<b>4468,90</b>	<b>532,00</b>	<b>4468,90</b>	<b>532,00</b>	<b>4468,90</b>	<b>532,00</b>	<b>4468,90</b>	<b>532,00</b>
	Max.	8327,00	749,00	<b>5422,00</b>	<b>532,00</b>	<b>5422,00</b>	<b>532,00</b>	<b>5422,00</b>	<b>532,00</b>	<b>5422,00</b>	<b>532,00</b>
	Soma	70632,00	7490,00	<b>44689,00</b>	<b>5320,00</b>	<b>44689,00</b>	<b>5320,00</b>	<b>44689,00</b>	<b>5320,00</b>	<b>44689,00</b>	<b>5320,00</b>
$B_1$	Min.	1470,00	730,00	<b>1176,00</b>	<b>513,00</b>	<b>1176,00</b>	<b>513,00</b>	<b>1176,00</b>	<b>513,00</b>	<b>1176,00</b>	<b>513,00</b>
	Média	2569,20	946,80	<b>2454,00</b>	<b>903,40</b>	<b>2454,00</b>	<b>903,40</b>	<b>2454,00</b>	<b>903,40</b>	<b>2454,00</b>	<b>903,40</b>
	Max.	<b>3780,00</b>	<b>1001,00</b>	<b>3780,00</b>	<b>1001,00</b>	<b>3780,00</b>	<b>1001,00</b>	<b>3780,00</b>	<b>1001,00</b>	<b>3780,00</b>	<b>1001,00</b>
	Soma	25692,00	9468,00	<b>24540,00</b>	<b>9034,00</b>	<b>24540,00</b>	<b>9034,00</b>	<b>24540,00</b>	<b>9034,00</b>	<b>24540,00</b>	<b>9034,00</b>
$B_5$	Min.	2482,00	805,00	<b>1250,00</b>	<b>405,00</b>	<b>1250,00</b>	<b>405,00</b>	<b>1250,00</b>	<b>405,00</b>	<b>1250,00</b>	<b>405,00</b>
	Média	2953,20	936,00	<b>2609,70</b>	<b>835,00</b>	<b>2609,70</b>	<b>835,00</b>	<b>2609,70</b>	<b>835,00</b>	<b>2609,70</b>	<b>835,00</b>
	Max.	<b>3411,00</b>	<b>1005,00</b>	<b>3411,00</b>	<b>1005,00</b>	<b>3411,00</b>	<b>1005,00</b>	<b>3411,00</b>	<b>1005,00</b>	<b>3411,00</b>	<b>1005,00</b>
	Soma	29532,00	9360,00	<b>26097,00</b>	<b>8350,00</b>	<b>26097,00</b>	<b>8350,00</b>	<b>26097,00</b>	<b>8350,00</b>	<b>26097,00</b>	<b>8350,00</b>
$B_{10}$	Min.	5586,00	910,00	<b>4888,00</b>	<b>810,00</b>	<b>4888,00</b>	<b>810,00</b>	<b>4888,00</b>	<b>810,00</b>	<b>4888,00</b>	<b>810,00</b>
	Média	6023,80	990,00	<b>5880,00</b>	<b>970,00</b>	<b>5880,00</b>	<b>970,00</b>	<b>5880,00</b>	<b>970,00</b>	<b>5880,00</b>	<b>970,00</b>
	Max.	<b>6627,00</b>	<b>1010,00</b>	<b>6627,00</b>	<b>1010,00</b>	<b>6627,00</b>	<b>1010,00</b>	<b>6627,00</b>	<b>1010,00</b>	<b>6627,00</b>	<b>1010,00</b>
	Soma	60238,00	9900,00	<b>58800,00</b>	<b>9700,00</b>	<b>58800,00</b>	<b>9700,00</b>	<b>58800,00</b>	<b>9700,00</b>	<b>58800,00</b>	<b>9700,00</b>
$B_{20}$	Min.	<b>11447,00</b>	<b>1020,00</b>	<b>11447,00</b>	<b>1020,00</b>	<b>11447,00</b>	<b>1020,00</b>	<b>11447,00</b>	<b>1020,00</b>	<b>11447,00</b>	<b>1020,00</b>
	Média	<b>12207,80</b>	<b>1020,00</b>	<b>12207,80</b>	<b>1020,00</b>	<b>12207,80</b>	<b>1020,00</b>	<b>12207,80</b>	<b>1020,00</b>	<b>12207,80</b>	<b>1020,00</b>
	Max.	<b>12905,00</b>	<b>1020,00</b>	<b>12905,00</b>	<b>1020,00</b>	<b>12905,00</b>	<b>1020,00</b>	<b>12905,00</b>	<b>1020,00</b>	<b>12905,00</b>	<b>1020,00</b>
	Soma	<b>122078,00</b>	<b>10200,00</b>	<b>122078,00</b>	<b>10200,00</b>	<b>122078,00</b>	<b>10200,00</b>	<b>122078,00</b>	<b>10200,00</b>	<b>122078,00</b>	<b>10200,00</b>

Negrito indica o menor valor.

FONTE: O autor (2020).

TABELA 2 – Comparação entre as discretizações para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) e Mohanty, Mathur e Ivancic (1994)

Problema		NP		RRP		RNP		MiM	
		Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições
MILOPP	Min.	<b>130,00</b>	<b>52,00</b>	<b>130,00</b>	<b>52,00</b>	<b>130,00</b>	<b>52,00</b>	<b>130,00</b>	<b>52,00</b>
	Média	37523,64	5228,33	<b>31799,17</b>	<b>4000,86</b>	37523,64	5228,33	32666,74	4121,19
	Max.	<b>337924,00</b>	38051,00	<b>337924,00</b>	<b>25764,00</b>	<b>337924,00</b>	38051,00	<b>337924,00</b>	<b>25764,00</b>
	Soma	1575993,00	219590,00	<b>1335565,00</b>	<b>168036,00</b>	1575993,00	219590,00	1372003,00	173090,00
MHLOPP	Min.	<b>1493,00</b>	<b>279,00</b>	<b>1493,00</b>	<b>279,00</b>	<b>1493,00</b>	<b>279,00</b>	<b>1493,00</b>	<b>279,00</b>
	Média	59385,06	8468,75	<b>51612,13</b>	<b>6655,00</b>	59385,06	8468,75	52750,81	6812,94
	Max.	<b>264270,00</b>	35677,00	<b>264270,00</b>	<b>22636,00</b>	<b>264270,00</b>	35677,00	<b>264270,00</b>	<b>22636,00</b>
	Soma	950161,00	135500,00	<b>825794,00</b>	<b>106480,00</b>	950161,00	135500,00	844013,00	109007,00
SSSCSP	Min.	<b>1458,00</b>	<b>435,00</b>	<b>1458,00</b>	<b>435,00</b>	<b>1458,00</b>	<b>435,00</b>	<b>1458,00</b>	<b>435,00</b>
	Média	108078,23	15255,81	<b>98276,96</b>	<b>12903,66</b>	108078,23	15255,81	99173,64	13056,98
	Max.	884170,00	75604,00	<b>838042,00</b>	<b>62612,00</b>	884170,00	75604,00	<b>838042,00</b>	<b>62612,00</b>
	Soma	5079677,00	717023,00	<b>4619017,00</b>	<b>606472,00</b>	5079677,00	717023,00	4661161,00	613678,00
MSSCSP	Min.	<b>8988,00</b>	<b>1755,00</b>	<b>8988,00</b>	<b>1755,00</b>	<b>8988,00</b>	<b>1755,00</b>	<b>8988,00</b>	<b>1755,00</b>
	Média	430185,94	56358,53	<b>390685,71</b>	<b>47166,65</b>	430185,94	56358,53	393991,12	47731,82
	Max.	3337194,00	297042,00	<b>3147992,00</b>	<b>243676,00</b>	3337194,00	297042,00	<b>3147992,00</b>	<b>243676,00</b>
	Soma	7313161,00	958095,00	<b>6641657,00</b>	<b>801833,00</b>	7313161,00	958095,00	6697849,00	811441,00

Negrito indica o menor valor.

FONTE: O autor (2020).

com o RRP, não há uma relação de dominância estabelecida entre a cardinalidade dos conjuntos gerados usando RRP e RNP. Em alguns casos, o RRP gera menos pontos do que o RNP, enquanto em outros casos o oposto ocorre, e há ainda situações nas quais essas discretizações geram os mesmos pontos e, portanto, os conjuntos correspondentes possuem a mesma cardinalidade. Côté e Iori (2018) demonstraram que os conjuntos gerados pelo MiM possuem, no máximo, o mesmo número de pontos do que aqueles gerados usando o RNP. Embora também não exista uma relação de dominância entre o RRP e o MiM, uma característica importante dessa discretização é que a mesma garante que não há perda de generalidade quando a aplicada a problemas de corte e empacotamento gerais, isto é, sem a adição de considerações práticas (CÔTÉ; IORI, 2018).

Testes foram efetuados para analisar a ocorrência de perda de soluções ótimas nos problemas envolvendo a estabilidade da carga. Desse modo, dois testes preliminares foram efetuados: inicialmente, todas as dimensões do contêiner foram discretizadas usando uma das técnicas apresentadas na Seção 3.1 (inclusive a UN) e o valor do parâmetro de estabilidade foi definido como  $\alpha = 1$ ; na análise dos resultados destes testes, observou-se perda de generalidade em pelo menos uma instância em todas as discretizações, exceto quando se empregou o NP, o RNP, e a UN. Na sequência, utilizou-se o RRP, o RNP, e o MiM para efetuar a discretização do plano da base do contêiner, enquanto o eixo da altura foi discretizado usando o NP, numa tentativa de obter mais pontos para carregar as caixas de modo estável. Novamente, verificou-se perda de generalidade usando as discretizações RRP e MiM.

Um exemplo de perda de generalidade em casos envolvendo a consideração prática de estabilidade é apresentado na FIGURA 7, onde representa-se um contêiner com dimensões  $(L, W, H) = (100, 100, 100)$  e cinco tipos de caixas:  $(l_1, w_1, h_1) = (60, 40, 58)$ ,  $(l_2, w_2, h_2) = (71, 39, 43)$ ,  $(l_3, w_3, h_3) = (68, 69, 54)$ ,  $(l_4, w_4, h_4) = (38, 53, 53)$  e  $(l_5, w_5, h_5) = (27, 72, 54)$ . As caixas possuem orientação fixa e disponibilidade de 2, 3, 1, 1 e 2 unidades, respectivamente. Na solução ótima para este problema, considerando o parâmetro de estabilidade  $\alpha = 1$ , o contêiner possui uma ocupação de 59,64%. Esse valor é obtido apenas quando o contêiner tem suas dimensões discretizadas usando-se o NP (ou, alternativamente, o RNP). Caso se utilize o RRP ou o MiM, a ocupação do interior do contêiner diminui para 48,40%, caracterizando perda de solução ótima. Os padrões de carregamento para este problema específico, usando as abordagens NP e RRP/MiM para discretizar o contêiner, são apresentados na FIGURA 7. Desse modo, em todos os testes realizados neste trabalho, quando considerando a restrição de estabilidade da carga, utilizou-se o NP para discretização do contêiner.

Ainda a respeito da estabilidade da carga, é importante salientar que não há perda de generalidade utilizando o NP apenas se o parâmetro de estabilidade é  $\alpha = 1$ ,

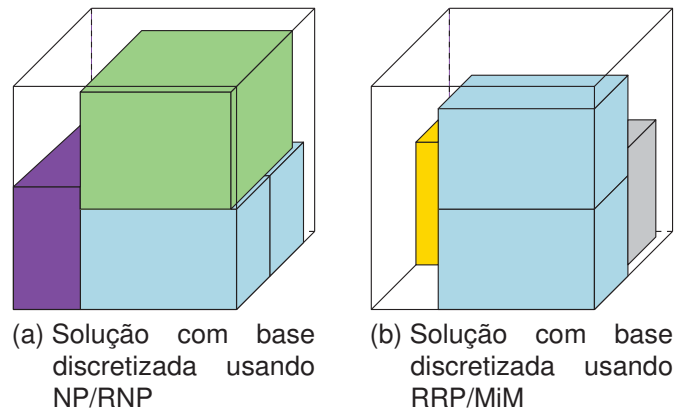


FIGURA 7 – Exemplo de perda de solução ótima utilizando diferentes discretizações

FONTE: O autor (2020).

isto é, a base de cada caixa deve estar totalmente apoiada (JUNQUEIRA; MORABITO; YAMASHITA, 2012b). Diferentes abordagens que tratam da estabilidade da carga, considerando a soma de forças que atuam sobre o carregamento, foram propostas por Silva, Soma e Maculan (2003), Ramos, Oliveira e Lopes (2016) e Bracht et al. (2016).

As TABELAS 3–6 apresentam os valores mínimo, médio e máximo obtidos utilizando as discretizações NP e MiM para os conjuntos de testes  $A_m$  para o problema de um único contêiner dado por (3.12)–(3.15), com orientação fixa e também permitindo a rotação das caixas. A primeira coluna representa o tamanho dos contêineres, seguida por informações a respeito do número de soluções factíveis e de soluções ótimas. Nas tabelas, é possível perceber que, à medida que o valor de  $m$  aumenta, o número de soluções ótimas obtidas utilizando o MiM também aumenta em relação ao NP.

#### 4.3 RESULTADOS PARA PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS ENTRADAS

Nesta Seção serão apresentados os resultados para os problemas de minimização (do valor) das entradas. Na Subseção 4.3.1 serão discutidos os resultados para o SSSCSP, enquanto a Subseção 4.3.2 irá tratar do MSSCSP.

##### 4.3.1 SSSCSP

As formulações para o SSSCSP apresentadas neste trabalho foram testadas em quatro diferentes cenários. Inicialmente, considerou-se o problema sem considerações práticas adicionais, definido por (3.7)–(3.10) com  $\mathcal{K} = 1$ . Posteriormente, adicionou-se a restrição de separação de caixas, dada pela formulação (3.16)–(3.18), seguida da consideração prática de estabilidade da carga, dada por (3.19). Por fim,

TABELA 3 – Resultados para as instâncias  $A_1$ 

		NP com rotação				MiM com rotação			
		Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Min.	10/10	0,00	0,00	64,00	10/10	0,00	0,00	64,00
	Média		0,00	2,15	79,42		0,00	2,24	79,42
	Max.		0,00	21,09	96,00		0,00	22,01	96,00
20	Min.	10/10	0,00	0,00	39,20	10/10	0,00	0,00	39,20
	Média		0,00	0,01	67,35		0,00	0,01	67,35
	Max.		0,00	0,06	90,00		0,00	0,04	90,00
30	Min.	10/10	0,00	0,00	37,33	10/10	0,00	0,00	37,33
	Média		0,00	0,01	59,43		0,00	0,01	59,43
	Max.		0,00	0,10	80,00		0,00	0,05	80,00
50	Min.	10/10	0,00	0,00	33,18	10/10	0,00	0,00	33,18
	Média		0,00	0,03	59,74		0,00	0,02	59,74
	Max.		0,00	0,15	87,09		0,00	0,12	87,09
100	Min.	10/10	0,00	0,00	20,33	10/10	0,00	0,00	20,33
	Média		0,00	0,04	54,11		0,00	0,02	54,11
	Max.		0,00	0,20	97,20		0,00	0,12	97,20

FONTE: O autor (2020).

TABELA 4 – Resultados para as instâncias  $A_5$ 

		NP sem rotação				MiM sem rotação				NP com rotação				MiM com rotação			
		Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Min.	10/10	0,00	0,03	77,20	10/10	0,00	0,02	77,20	10/10	0,00	0,40	88,00	10/10	0,00	0,40	88,00
	Média		0,00	0,33	91,34		0,00	0,32	91,34		0,00	196,57	97,32		0,00	208,70	97,32
	Max.		0,00	1,55	100,00		0,00	1,51	100,00		0,00	1752,75	100,00		0,00	1869,38	100,00
20	Min.	10/10	0,00	0,01	60,69	10/10	0,00	0,01	60,69	10/10	0,00	0,83	74,98	10/10	0,00	0,31	74,98
	Média		0,00	0,17	78,54		0,00	0,10	78,54		0,00	89,80	91,47		0,00	62,64	91,47
	Max.		0,00	0,79	91,10		0,00	0,25	91,10		0,00	312,40	99,00		0,00	289,17	99,00
30	Min.	10/10	0,00	0,00	42,93	10/10	0,00	0,00	42,93	10/10	0,00	0,14	54,33	10/10	0,00	0,03	54,33
	Média		0,00	0,02	60,90		0,00	0,01	60,90		0,00	30,82	77,29		0,00	10,38	77,29
	Max.		0,00	0,06	76,18		0,00	0,05	76,18		0,00	184,14	95,78		0,00	81,97	95,78
50	Min.	10/10	0,00	0,01	51,48	10/10	0,00	0,01	51,48	10/8	0,00	27,71	71,75	10/8	0,00	5,60	71,75
	Média		0,00	0,08	70,08		0,00	0,04	70,08		1,06	1121,08	85,31		0,59	838,23	85,66
	Max.		0,00	0,40	84,85		0,00	0,17	84,85		5,47	3600,00	92,95		3,59	3600,00	94,59
100	Min.	10/10	0,00	0,00	48,70	10/10	0,00	0,00	48,70	9/8	0,00	17,03	62,24	10/10	0,00	0,61	62,24
	Média		0,00	0,05	68,24		0,00	0,02	68,24		0,51	1172,24	78,96		0,00	118,40	79,58
	Max.		0,00	0,19	85,04		0,00	0,07	85,04		4,57	3600,00	86,88		0,00	477,31	91,22

FONTE: O autor (2020).

TABELA 5 – Resultados para as instâncias  $A_{10}$ 

		NP sem rotação				MiM sem rotação				NP com rotação				MiM com rotação			
		Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Min.	10/10	0,00	0,15	98,40	10/10	0,00	0,15	98,40	10/10	0,00	1,26	100,00	10/10	0,00	1,21	100,00
	Média		0,00	7,29	99,54		0,00	6,95	99,54		0,00	6,95	100,00		0,00	5,48	100,00
	Max.		0,00	34,30	100,00		0,00	34,10	100,00		0,00	16,25	100,00		0,00	9,77	100,00
20	Min.	10/10	0,00	0,13	76,45	10/10	0,00	0,06	76,45	10/8	0,00	123,06	92,64	10/8	0,00	123,41	92,64
	Média		0,00	5,37	89,95		0,00	3,94	89,95		0,09	1251,33	97,65		0,09	1257,04	97,65
	Max.		0,00	26,48	94,30		0,00	18,96	94,30		0,43	3600,00	99,55		0,43	3600,00	99,55
30	Min.	10/10	0,00	0,09	70,06	10/10	0,00	0,02	70,06	10/9	0,00	43,06	90,48	10/9	0,00	20,01	90,48
	Média		0,00	2,80	83,05		0,00	1,35	83,05		0,11	718,04	94,54		0,11	621,73	94,54
	Max.		0,00	14,39	93,56		0,00	5,95	93,56		1,11	3600,00	97,60		1,11	3600,00	97,60
50	Min.	10/10	0,00	0,25	77,36	10/10	0,00	0,12	77,36	8/2	0,00	736,94	65,75	10/4	0,00	323,15	89,18
	Média		0,00	10,66	82,62		0,00	5,46	82,62		3,11	3223,30	89,38		2,78	2631,60	92,98
	Max.		0,00	39,44	87,13		0,00	36,55	87,13		8,46	3600,00	95,66		6,47	3600,00	95,66
100	Min.	9/9	0,00	0,63	65,70	9/9	0,00	0,12	65,70	1/1	0,00	1463,48	66,70	9/3	0,00	547,90	63,02
	Média		0,00	365,42	83,11		0,00	360,89	83,11		0,00	3386,35	77,82		2,31	2854,54	87,94
	Max.		0,00	3600,00	93,89		0,00	3600,00	93,89		0,00	3600,00	92,91		5,92	3600,00	96,54

FONTE: O autor (2020).

TABELA 6 – Resultados para as instâncias  $A_{20}$ 

	NP sem rotação				MIM sem rotação				NP com rotação				MIM com rotação			
	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)	Fact./Opt.	Gap (%)	Tempo (s)	Vol. (%)
10	Min.	10/10	0,00	0,57	99,60	10/10	0,00	0,57	99,60	10/10	0,00	2,17	99,60	10/10	0,00	2,08
	Média		0,00	2,12	99,96		0,00	2,12	99,96		0,00	11,30	99,96		0,00	10,93
	Max.		0,00	4,61	100,00		0,00	4,61	100,00		0,00	26,70	100,00		0,00	27,91
20	Min.	10/10	0,00	10,02	90,71	10/10	0,00	4,76	90,71	10/7	0,00	52,37	98,45	10/7	0,00	49,48
	Média		0,00	46,65	95,19		0,00	35,40	95,19		0,20	2007,97	99,50		0,17	1985,58
	Max.		0,00	104,19	97,85		0,00	93,55	97,85		0,88	3600,00	100,00		0,88	3600,00
30	Min.	10/10	0,00	6,54	86,42	10/10	0,00	3,22	86,42	10/3	0,00	329,23	96,37	10/4	0,00	256,27
	Média		0,00	20,05	91,84		0,00	18,76	91,84		1,48	3007,41	97,63		1,34	3047,06
	Max.		0,00	41,56	97,21		0,00	83,20	97,21		3,28	3600,00	100,00		3,28	3600,00
50	Min.	10/9	0,00	36,80	85,56	10/10	0,00	15,10	85,56	0/0	-	3600,00	62,75	0/0	-	3600,00
	Média		0,31	993,05	91,49		0,00	284,81	91,49		-	3600,00	77,16		-	3600,00
	Max.		3,19	3600,00	94,60		0,00	1490,58	94,60		-	3600,00	85,55		-	3600,00
100	Min.	8/7	0,00	113,31	79,71	9/9	0,00	11,25	79,71	0/0	-	3600,00	80,57	0/0	-	3600,00
	Média		0,64	1796,03	86,99		0,00	503,65	87,42		-	3600,00	80,57		-	3600,00
	Max.		6,46	3600,00	93,87		0,00	3600,00	93,87		-	3600,00	80,57		-	3600,00

FONTE: O autor (2020).

considerou-se um cenário onde as restrições de separação das caixas e de estabilidade foram consideradas simultaneamente.

Após a obtenção de um *upper bound* por meio da abordagem descrita na Seção 3.5.1, efetuou-se a resolução do problema de particionamento de conjuntos. Soluções ótimas, obtidas pela comparação entre o *upper* e o *lower bound*, foram obtidas em 23 instâncias para problemas sem considerações práticas adicionais, 23 problemas considerando estabilidade das caixas, 13 testes com a restrição de separação das caixas, e também 13 problemas que consideraram a separação de caixas e a estabilidade, como pode ser observado na TABELA 7. Os *lower bounds* calculados neste trabalho são mais ajustados do que os computados por Eley (2002), os quais são apresentados como  $LB_e$  na tabela. Os *lower bounds*, os *upper bounds*, e os padrões de carga de cada instância foram determinados em um tempo médio de menos de 10 segundos.

A TABELA 8 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelas abordagens propostas neste trabalho com as técnicas de resolução apresentadas na Seção 4.1, destacando as soluções ótimas em negrito e as melhores soluções conhecidas (MSC) em itálico. A solução de dois problemas foi melhorada, e igualou-se a MSC em 46 dos 47 problemas tratados. Além disso, obteve-se a solução ótima em 43 instâncias, o maior número alcançado na literatura considerando-se o conjunto de testes de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989), com otimalidade provada em 91,48% das instâncias. Na comparação entre as TABELAS 7 e 8, observa-se que, além das 23 instâncias cuja solução ótima foi provada por meio da comparação entre os *bounds*, o problema de particionamento de conjuntos obteve a solução ótima em outros 19 problemas; tais soluções tiveram sua otimalidade provada por meio da resolução do modelo matemático. De modo geral, a soma dos contêineres necessários para carregar as caixas é de 689, dois a menos do que a abordagem proposta por Zhu, Huang e Lim (2012), que até então gerava os melhores resultados da literatura.

TABELA 7 – *Bounds* para o SSSCSP para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989)

#	$LB_e$	Sem considerações práticas			Com estabilidade			Com separação de caixas			Com estabilidade e separação de caixas		
		$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	Tempo (s)	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	Tempo (s)	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	Tempo (s)	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	Tempo (s)
1	19	19	25	11,03	19	25	2,38	19	27	2,63	19	27	2,87
2	7	7	10	6,87	7	10	5,30	8	10	4,46	8	10	5,89
3	19	<b>19</b>	<b>19</b>	8,83	<b>19</b>	<b>19</b>	8,10	19	22	10,64	19	22	10,83
4	26	<b>26</b>	<b>26</b>	8,97	<b>26</b>	<b>26</b>	5,15	26	28	6,82	26	28	8,35
5	46	46	51	4,87	46	51	4,88	46	51	7,78	46	51	7,95
6	10	<b>10</b>	<b>10</b>	4,52	<b>10</b>	<b>10</b>	4,62	<b>10</b>	<b>10</b>	5,54	<b>10</b>	<b>10</b>	5,87
7	16	<b>16</b>	<b>16</b>	3,28	<b>16</b>	<b>16</b>	3,27	<b>16</b>	<b>16</b>	4,20	<b>16</b>	<b>16</b>	4,07
8	4	<b>4</b>	<b>4</b>	6,55	<b>4</b>	<b>4</b>	6,19	<b>4</b>	<b>4</b>	8,21	<b>4</b>	<b>4</b>	7,91
9	16	17	19	2,20	17	19	2,24	18	19	2,61	18	19	2,58
10	37	43	55	2,46	43	55	2,32	47	55	2,58	47	55	3,74
11	14	14	16	3,08	14	16	2,76	16	18	3,42	16	18	3,94
12	45	<b>53</b>	<b>53</b>	3,88	<b>53</b>	<b>53</b>	3,36	53	56	4,52	53	56	7,72
13	20	21	25	8,19	21	25	4,15	22	25	4,74	22	25	7,06
14	27	<b>27</b>	<b>27</b>	6,52	<b>27</b>	<b>27</b>	3,64	28	29	4,17	28	29	6,98
15	11	<b>11</b>	<b>11</b>	7,28	<b>11</b>	<b>11</b>	3,81	11	12	4,61	11	12	7,85
16	21	21	26	3,23	21	26	3,36	21	26	4,26	21	26	5,98
17	7	<b>7</b>	<b>7</b>	6,22	<b>7</b>	<b>7</b>	5,95	7	9	6,10	7	9	8,12
18	1	<b>2</b>	<b>2</b>	14,69	<b>2</b>	<b>2</b>	10,78	<b>2</b>	<b>2</b>	8,59	<b>2</b>	<b>2</b>	9,81
19	1	<b>3</b>	<b>3</b>	10,66	<b>3</b>	<b>3</b>	8,09	<b>3</b>	<b>3</b>	7,63	<b>3</b>	<b>3</b>	10,32
20	2	4	5	4,45	4	5	4,17	4	5	4,75	4	5	6,29
21	17	17	20	7,62	17	20	7,11	17	20	10,74	17	20	15,00
22	8	<b>8</b>	<b>8</b>	15,00	<b>8</b>	<b>8</b>	13,52	<b>8</b>	<b>8</b>	15,00	<b>8</b>	<b>8</b>	15,00
23	17	17	21	5,50	17	21	4,93	17	21	7,15	17	21	9,26
24	5	<b>5</b>	<b>5</b>	11,50	<b>5</b>	<b>5</b>	9,52	<b>5</b>	<b>5</b>	12,08	<b>5</b>	<b>5</b>	14,97
25	4	4	5	5,96	4	5	5,17	4	5	6,92	4	5	7,75
26	3	<b>3</b>	<b>3</b>	15,00	<b>3</b>	<b>3</b>	15,00	<b>3</b>	<b>3</b>	15,00	<b>3</b>	<b>3</b>	15,00
27	4	<b>4</b>	<b>4</b>	6,71	<b>4</b>	<b>4</b>	5,77	4	5	6,98	4	5	7,12
28	9	<b>9</b>	<b>9</b>	5,27	<b>9</b>	<b>9</b>	4,78	9	10	5,89	9	10	7,33
29	15	15	16	5,48	15	17	4,96	15	16	6,77	15	17	7,33
30	18	18	22	5,34	18	22	4,82	18	23	5,98	18	23	6,12
31	11	11	13	9,51	11	13	6,05	11	13	7,95	11	13	7,90
32	4	<b>4</b>	<b>4</b>	10,98	<b>4</b>	<b>4</b>	8,47	<b>4</b>	<b>4</b>	6,67	<b>4</b>	<b>4</b>	6,85
33	4	<b>4</b>	<b>4</b>	8,91	<b>4</b>	<b>4</b>	6,77	4	5	7,23	4	5	6,60
34	5	7	8	4,67	7	8	4,42	7	8	5,09	7	8	5,17
35	2	<b>2</b>	<b>2</b>	5,21	<b>2</b>	<b>2</b>	4,36	<b>3</b>	<b>3</b>	3,58	<b>3</b>	<b>3</b>	5,55
36	10	10	14	3,55	10	14	2,81	11	19	2,80	11	19	5,00
37	12	12	23	7,26	12	23	5,90	12	23	6,84	12	23	7,52
38	25	26	45	6,49	26	45	4,95	26	45	6,16	26	45	7,12
39	12	12	15	6,24	12	15	4,29	12	15	4,64	12	15	5,25
40	7	7	8	13,74	7	8	11,15	7	9	12,48	7	9	12,99
41	14	14	15	5,88	14	15	5,00	14	16	7,13	14	16	7,54
42	4	<b>4</b>	<b>4</b>	12,00	<b>4</b>	<b>4</b>	7,52	<b>4</b>	<b>4</b>	6,65	<b>4</b>	<b>4</b>	6,56
43	3	<b>3</b>	<b>3</b>	15,00	<b>3</b>	<b>3</b>	11,38	<b>3</b>	<b>3</b>	9,53	<b>3</b>	<b>3</b>	11,46
44	3	3	4	6,64	3	4	5,58	3	4	6,81	3	4	10,17
45	2	2	3	15,00	2	3	15,00	2	3	15,00	2	3	15,00
46	2	<b>2</b>	<b>2</b>	15,00	<b>2</b>	<b>2</b>	15,00	<b>2</b>	<b>2</b>	15,00	<b>2</b>	<b>2</b>	15,00
47	3	<b>3</b>	<b>3</b>	15,00	<b>3</b>	<b>3</b>	15,00	3	4	15,00	3	4	15,00
Soma	572	596	693		596	694		608	723		608	724	
Média				7,92			6,46			7,22			8,29

Negrito indica solução ótima.

FONTE: O autor (2020).



TABELA 8 – Resultados para as instâncias Ivancic, Mathur e Mohanty (1989)

#	IVA	BOR	ELY	LZG	CHE	LIM	ZHU	Este trabalho		
								Contêineres	Tempo (s)	Diferença à MSC
1	26	25	25	25	25	25	25	<b>25</b>	0,04	0
2	11	10	10	10	10	10	10	<b>9</b>	2,66	-1
3	20	20	20	19	19	19	19	<b>19</b>	8,83	0
4	27	28	26	26	26	26	26	<b>26</b>	8,97	0
5	65	51	51	51	51	51	51	<b>51</b>	82,09	0
6	10	10	10	10	10	10	10	<b>10</b>	4,52	0
7	16	16	16	16	16	16	16	<b>16</b>	3,28	0
8	5	4	4	4	4	4	4	<b>4</b>	6,55	0
9	19	19	19	19	19	19	19	<b>19</b>	0,85	0
10	55	55	55	55	55	55	55	<b>55</b>	0,02	0
11	18	18	17	16	16	16	16	<b>16</b>	31,82	0
12	55	53	53	53	53	53	53	<b>53</b>	3,88	0
13	27	25	25	25	25	25	25	<b>25</b>	1,30	0
14	28	28	27	27	27	27	27	<b>27</b>	6,52	0
15	11	11	11	11	11	11	11	<b>11</b>	7,28	0
16	34	26	26	26	26	26	26	<b>26</b>	0,76	0
17	8	7	7	7	7	7	7	<b>7</b>	6,22	0
18	3	2	2	2	2	2	2	<b>2</b>	14,69	0
19	3	3	3	3	3	3	3	<b>3</b>	10,66	0
20	5	5	5	5	5	5	5	<b>5</b>	49,90	0
21	24	21	20	20	20	20	20	<b>20</b>	3217,77	0
22	10	9	8	9	8	9	8	<b>8</b>	15,00	0
23	21	20	20	20	19	20	19	<b>19</b>	930,95	0
24	6	6	6	5	5	5	5	<b>5</b>	11,50	0
25	6	5	5	5	5	5	5	<b>5</b>	3600,00	0
26	3	3	3	3	3	3	3	<b>3</b>	15,00	0
27	5	5	5	5	5	5	4	<b>4</b>	6,71	0
28	10	10	10	9	10	9	10	<b>9</b>	5,27	0
29	18	17	17	17	17	17	17	<b>16</b>	1116,65	-1
30	24	22	22	22	22	22	22	<b>22</b>	3600,00	0
31	13	13	13	12	12	12	12	<b>13</b>	3600,00	1
32	5	4	4	4	4	4	4	<b>4</b>	10,98	0
33	5	5	5	4	4	4	4	<b>4</b>	8,91	0
34	9	8	8	8	8	8	8	<b>8</b>	26,41	0
35	3	2	2	2	2	2	2	<b>2</b>	5,21	0
36	18	14	14	14	14	14	14	<b>14</b>	0,39	0
37	26	23	23	23	23	23	23	<b>23</b>	3,14	0
38	50	45	45	45	45	45	45	<b>45</b>	0,77	0
39	16	15	15	15	15	15	15	<b>15</b>	2139,96	0
40	9	9	8	9	8	9	8	<b>8</b>	104,49	0
41	16	15	15	15	15	15	15	<b>15</b>	27,96	0
42	4	4	4	4	4	4	4	<b>4</b>	12,00	0
43	3	3	3	3	3	3	3	<b>3</b>	15,00	0
44	4	3	4	3	3	3	3	<b>3</b>	747,40	0
45	3	3	3	3	3	3	3	<b>3</b>	3600,00	0
46	2	2	2	2	2	2	2	<b>2</b>	15,00	0
47	4	3	3	3	3	3	3	<b>3</b>	15,00	0
Soma	763	705	699	694	692	694	691	689		
Tempo médio (s)	-	-	30,00	6,43	45,94	6,43	246,20		491,54	

**Negrito** indica solução ótima.

*Itálico* indica MSC.

FONTE: o autor (2020).



Na TABELA 9 apresentam-se os resultados considerando a restrição de estabilidade da carga. As abordagens propostas neste trabalho são comparados com as heurísticas de busca em árvore com carregamento sequencial (ELS) e de busca em árvore com carregamento paralelo (ELP) propostas por Eley (2002), e com a técnica de geração de colunas com restrição de suporte total da base das caixas (ZST) de Zhu, Huang e Lim (2012). Das 47 instâncias, a solução ótima foi alcançada em 36 problemas, destacados em negrito na tabela. Os resultados obtidos são iguais a MSC em 42 instâncias, e a MSC foi melhorada em dois testes, exigindo um contêiner a menos para carregar as caixas em cada um destes problemas.

A TABELA 10 apresenta os resultados para os problemas com consideração prática de separação das caixas. De 47 instâncias, provou-se a otimalidade em 37 casos, melhorando a MSC em 11 problemas. De modo geral, a abordagem proposta neste trabalho utiliza 10 contêineres a menos do que as formulações de Eley (2003).

TABELA 9 – Resultados para as instâncias Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) com estabilidade

#	ELS	ELP	ZST	Este trabalho		
				Contêineres	Tempo (s)	Desvio à MSC
1	27	26	25	<b>25</b>	0,06	0
2	11	10	10	<b>10</b>	3600,00	0
3	21	22	19	<b>19</b>	8,10	0
4	29	30	26	<b>26</b>	5,15	0
5	55	51	51	<b>51</b>	44,83	0
6	10	10	10	<b>10</b>	4,62	0
7	16	16	16	<b>16</b>	3,27	0
8	4	4	4	<b>4</b>	6,19	0
9	19	19	19	<b>19</b>	13,45	0
10	55	55	55	<b>55</b>	0,03	0
11	17	18	17	<b>16</b>	27,09	-1
12	53	53	53	<b>53</b>	3,36	0
13	25	25	25	<b>25</b>	8,07	0
14	27	27	27	<b>27</b>	3,64	0
15	12	12	11	<b>11</b>	3,81	0
16	28	26	26	<b>26</b>	3,14	0
17	8	7	7	<b>7</b>	5,95	0
18	2	2	2	<b>2</b>	10,78	0
19	3	3	3	<b>3</b>	8,09	0
20	5	5	5	<b>5</b>	873,75	0
21	24	26	20	<b>20</b>	3600,00	0
22	9	9	8	<b>8</b>	13,52	0
23	21	21	20	<b>21</b>	3600,00	1
24	6	6	5	<b>5</b>	9,52	0
25	6	5	5	<b>5</b>	3600,00	0
26	3	3	3	<b>3</b>	15,00	0
27	5	5	4	<b>4</b>	5,77	0
28	11	10	10	<b>9</b>	4,78	-1
29	18	18	17	<b>17</b>	3600,00	0
30	22	23	22	<b>22</b>	3600,00	0

Continua na próxima página

TABELA 9 – Resultados para as instâncias Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) com estabilidade  
– Continuação

#	ELS	ELP	ZST	Este trabalho		
				Contêineres	Tempo (s)	Desvio à MSC
31	13	14	12	13	3600,00	1
32	4	4	4	<b>4</b>	8,47	0
33	5	5	4	<b>4</b>	6,77	0
34	8	9	8	<b>8</b>	297,94	0
35	2	2	2	<b>2</b>	4,36	0
36	18	14	14	<b>14</b>	0,80	0
37	26	23	23	<b>23</b>	11,27	0
38	46	45	45	<b>45</b>	2,70	0
39	15	15	15	15	3600,00	0
40	9	9	8	8	3600,00	0
41	16	15	15	<b>15</b>	338,58	0
42	4	4	4	<b>4</b>	7,52	0
43	3	3	3	<b>3</b>	11,38	0
44	4	4	3	<b>3</b>	3523,13	0
45	3	3	3	3	3600,00	0
46	2	2	2	<b>2</b>	15,00	0
47	3	3	3	<b>3</b>	15,00	0
Soma	733	721	693	693		
Tempo médio (s)	-	-	116,7		880,89	

**Negrito** indica solução ótima.

*Itálico* indica MSC.

FONTE: o autor (2020).

TABELA 10 – Resultados para as instâncias Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) com separação de caixas

#	ELY	Este trabalho				
		Com separação de caixas			Com estabilidade e separação de caixas	
		Contêineres	Tempo (s)	Desvio à MSC	Contêineres	Tempo (s)
1	27	<b>27</b>	1,60	0	<b>27</b>	1,95
2	11	<b>10</b>	6,50	-1	<b>10</b>	178,80
3	20	<b>20</b>	69,08	0	<b>20</b>	2075,38
4	28	<b>28</b>	19,27	0	<b>28</b>	104,18
5	51	<b>51</b>	20,04	0	<b>51</b>	47,40
6	10	<b>10</b>	5,54	0	<b>10</b>	5,87
7	16	<b>16</b>	4,20	0	<b>16</b>	4,07
8	4	<b>4</b>	8,21	0	<b>4</b>	7,91
9	19	<b>19</b>	0,42	0	<b>19</b>	14,64
10	55	<b>55</b>	0,03	0	<b>55</b>	0,05
11	18	<b>17</b>	13,82	-1	18	3600,00
12	56	<b>56</b>	2,05	0	56	3600,00
13	25	<b>25</b>	1,37	0	<b>25</b>	8,21
14	28	<b>28</b>	0,79	0	<b>28</b>	23,93

Continua na próxima página

TABELA 10 – Resultados para as instâncias Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) com separação de caixas – Continuação

#	ELY	Este trabalho				
		Com separação de caixas			Com estabilidade e separação de caixas	
		Contêineres	Tempo (s)	Desvio à MSC	Contêineres	Tempo (s)
15	12	<b>12</b>	45,81	0	<b>12</b>	2597,52
16	26	<b>26</b>	0,79	0	<b>26</b>	2,72
17	9	<b>9</b>	422,91	0	9	3600,00
18	2	<b>2</b>	8,59	0	<b>2</b>	9,81
19	3	<b>3</b>	7,63	0	<b>3</b>	10,32
20	5	<b>5</b>	105,42	0	<b>5</b>	1027,68
21	21	<b>20</b>	2712,63	-1	20	3600,00
22	8	<b>8</b>	15,00	0	<b>8</b>	15,00
23	21	<i>20</i>	3600,00	-1	21	3600,00
24	6	<b>5</b>	12,08	-1	<b>5</b>	14,97
25	5	5	3600,00	0	5	3600,00
26	3	<b>3</b>	15,00	0	<b>3</b>	15,00
27	5	5	3600,00	0	5	3600,00
28	10	<b>9</b>	1176,35	-1	10	3600,00
29	17	<b>16</b>	1112,28	-1	17	3600,00
30	23	<i>22</i>	3600,00	-1	23	3600,00
31	13	<i>13</i>	3600,00	0	13	3600,00
32	4	<b>4</b>	6,67	0	<b>4</b>	6,85
33	5	5	3600,00	0	5	3600,00
34	9	<b>8</b>	31,93	-1	<b>8</b>	281,09
35	3	<b>3</b>	3,58	0	<b>3</b>	5,55
36	18	<b>18</b>	4,40	0	<b>18</b>	34,33
37	23	<b>23</b>	3,29	0	<b>23</b>	10,98
38	45	<b>45</b>	0,83	0	<b>45</b>	2,74
39	15	<b>15</b>	1008,68	0	15	3600,00
40	9	9	3600,00	0	9	3600,00
41	16	<b>16</b>	155,73	0	16	3600,00
42	5	<b>4</b>	7,13	-1	<b>4</b>	6,56
43	4	<b>3</b>	6,65	-1	<b>3</b>	11,46
44	4	4	3600,00	0	4	3600,00
45	3	3	3600,00	0	3	3600,00
46	2	<b>2</b>	15,00	0	<b>2</b>	15,00
47	3	4	3600,00	1	4	3600,00
Soma	725	715			720	
Tempo médio (s)			915,56			1517,87

**Negrito** indica solução ótima.

*Itálico* indica MSC.

FONTE: o autor (2020).

#### 4.3.2 MSSCSP

As formulações para o MSSCSP apresentadas neste trabalho também foram testadas em quatro diferentes configurações: o problema básico, definido por (3.7)–(3.10), com consideração prática de separação de caixas, dada pelas restrições (3.16)–

(3.17), seguido pelo requerimento de estabilidade, dado por (3.19), e pela consideração simultânea de separação de caixas e estabilidade de carga.

A TABELA 11 apresenta os *lower* e *upper bounds* para o MSSCSP em todos os cenários abordados. As colunas  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{U}$  apresentam os *lower* e *upper bounds* gerais, isto é, o volume mínimo e o volume máximo necessários para carregar o conjunto de caixas dos problemas. A coluna *QTD* apresenta, para cada tipo de contêiner, uma quantidade factível de contêineres para alocar a carga; tais valores foram obtidos por meio da técnica utilizada para o cálculo do *upper bound* geral.

Na TABELA 12 comparam-se os resultados das abordagens propostas neste trabalho, para o problema básico, com as soluções obtidas pelas técnicas descritas na Seção 4.1. Na tabela, apresentam-se a ocupação média, em termos percentuais do volume dos contêineres, e o número de contêineres necessários para alocar a carga. As soluções ótimas e as MSC são destacadas em negrito e em *itálico*, respectivamente. Em 16 dos 17 problemas abordados, a solução obtida pelas técnicas de resolução apresentadas neste trabalho são iguais ou melhores do que a atual MSC; além disso, em 5 instâncias obteve-se a solução ótima.

A TABELA 13 mostra os resultados com restrições adicionais incorporadas ao problema. A ocupação volumétrica dos contêineres diminui quando os requerimentos de estabilidade e separação de caixas são considerados. Em algumas instâncias, a adição da restrição de estabilidade acarreta em um aumento significativo no número de contêineres necessários para carregar as caixas.

TABELA 11 – *Bounds* para o MSSCSP para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989)

#	Sem restrições				Com estabilidade				Com separação de caixas				Com estabilidade e separação de caixas			
	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	QTD	Tempo (s)	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	QTD	Tempo (s)	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	QTD	Tempo (s)	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	QTD	Tempo (s)
1	17968	24280	(11/5)	17,90	17968	24280	(11/5)	7,67	18104	24832	(3/8)	7,09	18104	25920	(27/0)	8,76
2	116224	116224	(2/18/8)	22,67	116224	116224	(16/3/0)	18,13	116224	119040	(5/10/16)	25,24	116224	119040	(5/10/16)	27,12
3	70500	70500	(4/9/0)	14,35	70500	70500	(1/6/2)	14,07	70500	70500	(7/4/0)	17,95	70500	70500	(7/4/0)	17,85
4	2793600	3141120	(2/0/14)	7,75	2793600	3141120	(2/0/14)	7,32	2952960	3173760	(11/1/6)	8,61	2952960	3173760	(11/1/6)	10,26
5	938000	938000	(3/0/25)	18,59	938000	938000	(3/0/25)	11,15	952000	973000	(1/3/23)	13,43	952000	973000	(1/3/23)	21,76
6	117360	120960	(8/5/0)	16,72	117360	120960	(8/5/0)	13,13	117360	120960	(6/9/0)	14,98	117360	120960	(6/9/0)	21,95
7	19584	20040	(1/1/0)	29,80	19584	21132	(1/0/2)	23,04	19584	21132	(1/0/2)	20,97	19584	21132	(1/0/2)	26,42
8	89640	97820	(2/7/0)	28,11	89180	98520	(6/4/3)	25,57	89640	99360	(0/8/0)	33,94	89140	99360	(0/8/0)	46,28
9	108000	113440	(3/0/1)	32,46	108000	113440	(3/0/1)	29,69	108000	113440	(3/0/1)	33,99	108000	113440	(3/0/1)	37,72
10	48750	51000	(4/0)	11,98	48750	51000	(4/0)	10,55	49500	54750	(1/7)	12,87	49500	54750	(1/7)	14,45
11	129690	141114	(12/1/2)	20,33	129690	146124	(12/0/3)	15,82	129690	141852	(11/4/1)	20,71	129690	146124	(12/0/3)	21,35
12	25200	26800	(2/1/1)	24,55	25200	26800	(2/1/1)	19,66	25200	26800	(2/1/1)	19,00	25200	26800	(2/1/1)	18,62
13	24300	26250	(2/0)	8,76	24300	26250	(2/0)	7,17	25275	34995	(1/9)	6,39	25275	34995	(1/9)	10,55
14	99040	120960	(3/0/11)	19,99	99040	120960	(3/0/11)	15,14	100480	120960	(3/0/11)	17,64	100480	120960	(3/0/11)	19,89
15	49392	53424	(4/7)	19,62	49392	53424	(4/7)	16,15	49392	53712	(2/11)	19,61	49392	53712	(2/11)	20,53
16	363430	428962	(1/1/1)	33,64	363430	428962	(1/1/1)	24,48	363430	430080	(4/0/0)	22,99	363430	428962	(1/1/1)	28,18
17	167200	178944	(0/1/1)	45,00	167200	178944	(0/1/1)	45,00	167200	198044	(1/1/0)	45,00	167200	198044	(1/1/0)	45,00

FONTE: o autor (2020).

TABELA 12 – Resultados para o MSSCSP para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989)

#	IVA	BOR	ELY	TAK	REN	Este trabalho		
						Vol. (#)	Tempo (s)	Gap (%)
1	71,8 (26/0)	74,7 (25/0)	74,7 (25/0)	74,7 (25/0)	74,7 (25/0)	<b>78,2 (1/8)</b>	5,91	0,00
2	97,6 (7/13/6)	95,1 (1/19/11)	<i>99,9 (2/13/17)</i>	99,7 (7/15/1)	99,1 (2/22/3)	<b>99,9 (2/18/8)</b>	118,53	0,00
3	97,6 (4/6/1)	<i>99,7 (4/1/2)</i>	<i>99,7 (7/4/0)</i>	99,6 (7/1/0)	<i>99,7 (4/1/2)</i>	<b>99,7 (7/4/0)</b>	1,06	0,00
4	85,8 (10/1/7)	86,8 (16/0/2)	<i>87,4 (2/0/14)</i>	87,1 (9/0/8)	<i>87,4 (2/0/14)</i>	<i>87,4 (2/0/14)</i>	3600,00	0,86
5	95,8 (3/0/26)	97,9 (7/0/23)	<i>99,4 (3/0/25)</i>	98,7 (1/1/25)	98,7 (0/5/20)	<b>99,4 (3/0/25)</b>	5,60	0,00
6	92,2 (7/6/1)	96,6 (8/5/0)	96,6 (6/9/0)	96,6 (7/7/0)	96,6 (7/7/0)	<i>98,9 (3/2/4)</i>	3600,00	0,61
7	90,6 (1/0/2)	90,6 (1/0/2)	90,6 (1/0/2)	90,6 (1/0/2)	90,6 (1/0/2)	<i>95,5 (1/1/0)</i>	3600,00	2,28
8	81,2 (3/3/11)	85,9 (0/4/10)	88,4 (9/2/5)	87,7 (1/6/4)	<i>91,0 (2/7/0)</i>	<i>91,0 (2/7/0)</i>	3600,00	8,36
9	75,0 (5/1/0)	90,2 (2/1/1)	<i>93,5 (3/0/1)</i>	92,7 (5/0/0)	92,7 (5/0/0)	<i>93,5 (3/0/1)</i>	3600,00	4,80
10	87,3 (2/5)	87,3 (2/5)	88,5 (1/7)	88,5 (1/7)	<i>95,0 (4/0)</i>	<i>95,0 (4/0)</i>	3600,00	4,41
11	85,3 (9/1/5)	87,8 (14/1/1)	86,3 (13/1/2)	85,0 (5/11/2)	87,2 (7/3/5)	<i>91,4 (12/1/2)</i>	3600,00	5,46
12	88,7 (0/2/4)	<i>94,0 (2/1/1)</i>	<i>94,0 (2/1/1)</i>	<i>94,0 (2/1/1)</i>	<i>94,0 (2/1/1)</i>	<i>94,0 (2/1/1)</i>	3600,00	5,97
13	74,3 (1/8)	<i>92,2 (2/0)</i>	<i>92,2 (2/0)</i>	<i>92,2 (2/0)</i>	<i>92,2 (2/0)</i>	<i>92,2 (2/0)</i>	3600,00	7,43
14	76,3 (3/2/11)	79,1 (3/3/10)	79,2 (2/3/11)	78,7 (3/1/11)	<i>81,3 (3/0/11)</i>	<b>81,3 (3/0/11)</b>	986,09	0,00
15	84,1 (1/14)	89,0 (0/15)	89,0 (0/15)	89,5 (2/11)	89,2 (1/13)	<i>90,2 (5/5)</i>	3600,00	3,51
16	82,7 (4/0/0)	<i>91,6 (2/1/0)</i>	<i>91,6 (2/1/0)</i>	82,9 (1/1/1)	<i>91,6 (2/1/0)</i>	82,8 (1/1/1)	3600,00	15,28
17	77,1 (1/0/2)	84,7 (0/0/3)	84,7 (0/0/3)	<i>91,6 (0/1/1)</i>	<i>91,6 (0/1/1)</i>	<i>91,6 (0/1/1)</i>	3600,00	6,56
Volume médio (%)	84,9	89,6	90,3	90,0	91,3	91,9		
Tempo médio (s)	-	-	30,00	-	20,00	2606,89		

Negrito indica solução ótima.

Itálico indica MSC.

FONTE: o autor (2020).

TABELA 13 – Resultados para o MSSCSP para as instâncias de Ivancic, Mathur e Mohanty (1989) com diferentes considerações práticas

#	Com estabilidade			Com separação de caixas			Com separação de caixas e estabilidade		
	Vol. (#)	Tempo (s)	Gap (%)	Vol. (#)	Tempo (s)	Gap (%)	Vol. (#)	Tempo (s)	Gap (%)
1	74,66 (25/0)	3600,00	0,53	<b>72,16 (3/8)</b>	89,16	0,00	<b>69,13 (27/0)</b>	3238,17	0,00
2	<b>99,94 (16/3/0)</b>	78,08	0,00	97,58 (5/10/16)	3600,00	2,37	97,58 (5/10/16)	3600,00	2,37
3	<b>99,64 (7/4/0)</b>	6,13	0,00	<b>99,64 (7/4/0)</b>	6,85	0,00	<b>99,64 (7/4/0)</b>	25,74	0,00
4	87,4 (2/0/14)	3600,00	1,96	87,08 (9/0/8)	3600,00	0,37	<b>86,5 (11/1/6)</b>	2569,13	0,00
5	<b>99,41 (1/3/22)</b>	21,61	0,00	95,83 (1/3/23)	3600,00	0,72	95,83 (1/3/23)	3600,00	0,72
6	96,62 (7/7/0)	3600,00	2,98	96,62 (6/9/0)	3600,00	2,98	96,62 (7/7/0)	3600,00	2,98
7	90,57 (1/0/2)	3600,00	7,33	90,57 (1/0/2)	3600,00	7,33	90,57 (1/0/2)	3600,00	7,33
8	90,39 (6/4/3)	3600,00	9,48	89,63 (0/8/0)	3600,00	9,78	89,63 (0/8/0)	3600,00	10,29
9	93,51 (3/0/1)	3600,00	4,80	93,51 (3/0/1)	3600,00	4,80	93,51 (3/0/1)	3600,00	4,80
10	95,04 (4/0)	3600,00	4,41	88,53 (1/7)	3600,00	9,59	88,53 (1/7)	3600,00	9,59
11	88,26 (12/0/3)	3600,00	11,25	90,92 (11/4/1)	3600,00	5,99	88,26 (12/0/3)	3600,00	11,09
12	94,02 (2/1/1)	3600,00	5,97	94,02 (2/1/1)	3600,00	5,97	94,02 (2/1/1)	3600,00	5,97
13	92,16 (2/0)	3600,00	7,43	69,12 (1/9)	3600,00	27,78	69,12 (1/9)	3600,00	27,78
14	<b>81,34 (3/0/11)</b>	2780,95	0,00	<b>81,34 (3/0/11)</b>	242,09	0,00	<b>81,34 (3/0/11)</b>	2699,74	0,00
15	89,95 (4/7)	3600,00	7,55	89,47 (2/11)	3600,00	4,02	89,47 (2/11)	3600,00	8,04
16	82,86 (1/1/1)	3600,00	15,28	82,65 (4/0/0)	3600,00	15,50	82,86 (1/1/1)	3600,00	15,28
17	91,59 (0/1/1)	3600,00	6,56	82,75 (1/1/0)	3600,00	15,57	82,75 (1/1/0)	3600,00	15,57
Volume médio (%)	91,02			88,32			87,96		
Tempo médio (s)		2922,75			2984,59			3254,87	

Negrito indica solução ótima.

FONTE: o autor (2020).

#### 4.4 RESULTADOS PARA PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO (DO VALOR) DAS SAÍDAS

Nesta Seção serão apresentados os resultados para os problemas de maximização (do valor) das saídas. Na Subseção 4.4.1 serão descritos os resultados para o MILOPP, enquanto a Subseção 4.4.2 irá discutir o MHLOPP.

##### 4.4.1 MILOPP

As formulações para o MILOPP apresentadas neste trabalho foram testadas em quatro configurações distintas. Inicialmente, testes foram efetuados para o problema básico, definido por (3.12)–(3.15) com  $\mathcal{K} = 1$ . Na sequência, foram analisados casos com separação das caixas, dados pelas restrições (3.16)–(3.18), e com a consideração de estabilidade da carga, dada por (3.19). Por fim, foram resolvidos problemas com separação de caixas e estabilidade.

A TABELA 14 apresenta os resultados para todos os cenários considerados para o MILOPP. Para o problema básico, a abordagem proposta neste trabalho obteve 31 soluções ótimas, isto é, para 73,80% das instâncias, em um tempo médio de 1100,25 segundos. Ao se considerar a restrição de estabilidade da carga, o tempo médio necessário para resolver o conjunto de testes aumenta para 1628,03 segundos, enquanto o número de soluções ótimas diminui para 24 problemas. No cenário com separação das caixas, computou-se o menor tempo médio necessário para resolver as instâncias, bem como o maior número de soluções ótimas. Embora problemas envolvendo estabilidade e separação de caixas constituam o cenário mais restrito dentre os abordados, 27 instâncias foram resolvidas otimamente, em um tempo médio de 1392,16 segundos.

##### 4.4.2 MHLOPP

Para analisar a formulação para o MHLOPP, quatro diferentes situações foram consideradas: inicialmente, avaliou-se apenas a formulação dada por (3.12)–(3.15). Na sequência, foram adicionadas as restrições de separação de caixas, a restrição de estabilidade da carga e, por fim, as duas considerações práticas foram abordadas em conjunto.

A TABELA 15 compara os resultados obtidos pelas técnicas de resolução apresentadas neste trabalho com as abordagens apresentadas na Seção 4.1. Em 14 das 16 instâncias, destacadas em *itálico*, obteve-se a MSC, sendo quem em 8 casos a MSC da literatura foi melhorada. Além disso, para 9 instâncias, destacadas em **negrito**, determinou-se a solução ótima.

TABELA 14 – Resultados para o MILOPP para as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994)

#	Sem restrições			Com estabilidade			Com separação de caixas			Com separação de caixas e estabilidade		
	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)
1	2304,00	0,00	0,04	2304,00	0,00	0,08	1920,00	0,00	0,13	1920,00	0,00	0,22
2	6912,00	0,00	8,60	6528,00	2,94	3600,00	5760,00	0,00	4,24	4800,00	0,00	59,65
3	42790,40	0,12	3600,00	42790,40	0,00	13,26	42790,40	0,00	16,07	42790,40	0,00	101,93
4	32256,00	0,00	0,08	32256,00	0,00	0,18	32256,00	0,00	0,09	32256,00	0,00	0,23
5	17920,00	0,00	0,02	17920,00	0,00	0,04	17920,00	0,00	0,03	17920,00	0,00	0,05
6	24150,00	0,00	0,05	24150,00	0,00	0,14	24150,00	0,00	0,05	24150,00	0,00	0,12
7	14875,00	0,00	0,02	14875,00	0,00	0,20	14875,00	0,00	0,11	14875,00	0,00	0,12
8	55375,00	0,00	3,95	55375,00	0,50	3600,00	55375,00	0,00	3,57	55375,00	0,50	3600,00
9	1016060,00	0,00	0,07	1016060,00	0,00	0,76	1016060,00	0,00	0,07	1016060,00	0,00	0,99
10	338688,00	0,00	0,01	338688,00	0,00	0,01	338688,00	0,00	0,01	338688,00	0,00	0,01
11	130500,00	0,00	0,01	130500,00	0,00	0,02	112500,00	0,00	0,04	112500,00	0,00	0,07
12	308250,00	0,00	2,88	308250,00	0,00	2,43	281250,00	0,00	0,67	281250,00	0,00	6,38
13	238500,00	0,00	0,04	238500,00	0,00	0,21	225000,00	0,00	0,15	225000,00	0,00	0,52
14	106176,00	0,00	114,47	106176,00	0,90	3600,00	103680,00	0,00	40,15	103680,00	0,00	1587,57
15	57600,00	0,00	0,12	57600,00	0,00	0,43	57600,00	0,00	0,09	57600,00	0,00	0,46
16	144480,00	0,40	3600,00	141984,00	2,43	3600,00	133056,00	0,00	339,59	129024,00	3,94	3600,00
17	22242,00	2,29	3600,00	16740,00	-	3600,00	22269,00	2,22	3600,00	19440,00	-	3600,00
18	12984,00	0,00	43,84	12591,00	1,67	3600,00	12984,00	0,00	23,49	12585,00	1,26	3600,00
19	18208,80	0,00	568,14	11199,20	-	3600,00	18208,80	0,00	700,74	18426,44	1,20	3600,00
20	45409,60	0,00	2454,58	24363,80	-	3600,00	45409,60	0,00	2504,50	21276,40	-	3600,00
21	18480,00	0,00	45,99	18480,00	0,00	774,82	18480,00	0,00	30,74	18480,00	0,00	766,16
22	74952,00	2,57	3600,00	64224,00	-	3600,00	73674,00	4,35	3600,00	25452,00	-	3600,00
23	84492,00	6,16	3600,00	73152,00	-	3600,00	74754,00	19,74	3600,00	44856,00	-	3600,00
24	93438,00	-	3600,00	92052,00	-	3600,00	92376,00	-	3600,00	72576,00	-	3600,00
25	9216,00	0,00	0,48	9216,00	0,00	5,13	9216,00	0,00	0,52	9216,00	0,00	5,05
26	12288,00	0,00	0,44	12288,00	0,00	4,07	12288,00	0,00	0,52	12288,00	0,00	3,89
27	25539,60	0,00	20,82	25539,60	0,00	269,18	25539,60	0,00	18,43	25539,60	0,00	276,11
28	22276,80	0,00	0,83	22276,80	0,00	6,94	22276,80	0,00	0,85	22276,80	0,00	6,88
29	36166,00	0,00	89,80	36166,00	0,00	967,94	36166,00	0,00	80,69	36166,00	0,00	994,51
30	18712,80	-	3600,00	17208,00	-	3600,00	5184,00	-	3600,00	5184,00	-	3600,00
31	17870,40	12,09	3600,00	19281,60	3,88	3600,00	18403,20	7,47	3600,00	10800,00	85,47	3600,00

Continua na próxima página

TABELA 14 – Resultados para o MILOPP para as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) - Continuação

#	Sem restrições			Com estabilidade			Com separação de caixas			Com separação de caixas e estabilidade		
	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)
32	<b>12960,00</b>	0,00	4,94	<b>12960,00</b>	0,00	50,53	<b>12960,00</b>	0,00	6,79	<b>12960,00</b>	0,00	42,40
33	34656,00	5,48	3600,00	32755,20	-	3600,00	31488,00	14,09	3600,00	-	-	3600,00
34	<b>9408,00</b>	0,00	0,11	<b>9408,00</b>	0,00	0,70	<b>9408,00</b>	0,00	0,14	<b>9408,00</b>	0,00	0,93
35	<b>32832,00</b>	0,00	0,65	<b>32832,00</b>	0,00	6,03	<b>32832,00</b>	0,00	0,75	<b>32832,00</b>	0,00	6,16
36	<b>14112,00</b>	0,00	8,48	<b>14112,00</b>	0,00	221,51	<b>12384,00</b>	0,00	3,06	<b>12384,00</b>	0,00	9,84
37	<b>32227,20</b>	0,00	75,94	32227,20	0,09	3600,00	<b>30096,00</b>	0,00	13,61	<b>30096,00</b>	0,00	111,28
38	<b>26769,60</b>	0,00	19,27	<b>26769,60</b>	0,00	1239,66	<b>26769,60</b>	0,00	19,32	<b>26769,60</b>	0,00	476,90
39	<b>14256,00</b>	0,00	1,42	<b>14256,00</b>	0,00	13,29	<b>14256,00</b>	0,00	1,63	<b>14256,00</b>	0,00	12,31
40	<b>376746,00</b>	0,00	3144,64	295155,00	-	3600,00	330908,00	0,72	3600,00	268128,00	-	3600,00
41	515418,00	6,10	3600,00	408426,00	-	3600,00	473226,00	15,19	3600,00	243360,00	-	3600,00
42	455167,00	2,10	3600,00	384090,00	-	3600,00	422466,00	3,67	3600,00	194688,00	-	3600,00
Tempo médio (s)			1100,25			1628,03			947,87			1392,16

**Negrito** indica solução ótima.

- indica que o Gurobi não determinou uma solução/*dual bound*.

FONTE: o autor (2020).



Cabe ressaltar que o valor da função objetivo obtido para o problema 4, conforme pode-se observar na TABELA 15, é significativamente menor do que os reportados na literatura. De acordo com os dados originais publicados por Mohanty, Mathur e Ivancic (1994), este problema possui 10 contêineres, sendo 5 com dimensões  $(L_1, W_1, H_1) = (60, 40, 72)$  e o restante com medidas  $(L_2, W_2, H_2) = (40, 36, 52)$ , totalizando 1238400,00 unidades de volume. Há dois tipos de itens: as caixas do tipo 1 possuem dimensões  $(l_1, w_1, h_1) = (36, 28, 24)$ , valor associado de  $v_1 = 1, 4$ , e disponibilidade  $b_1 = 50$ , enquanto as caixas do tipo 2 têm dimensões  $(l_2, w_2, h_2) = (40, 32, 20)$ , valor associado  $v_2 = 1, 0$ , e disponibilidade  $b_2 = 60$ . Assumindo-se que todo volume dos 10 contêineres seja ocupado por caixas do tipo 1 (que possui o maior valor associado), o valor associado a carga seria de, no máximo, 1733760,00. Dessa maneira, conclui-se que, para o problema 4, não é possível obter padrões de carga com os valores associados à carga apresentados pelos autores com os quais a abordagem descrita nesse trabalho é comparada.

TABELA 15 – Resultados para as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994)

#	MOH	BOR	ELY	TAK	REN	Este trabalho		
						Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)
1	8640,00	8640,00	8640,00	8640,00	8640,00	<b>9216,00</b>	0,00	20,14
2	83494,40	85120,00	85376,00	84224,00	85376,00	<b>85555,20</b>	0,00	8,75
3	<i>53262,50</i>	<i>53262,50</i>	<i>53262,50</i>	52350,00	<i>53262,50</i>	<b>53262,50</b>	0,00	2,73
4	2333440,00	2333440,00	2307840,00	2333440,00	2333440,00	<b>1354752,00</b>	0,00	0,07
5	495500,00	581250,00	<i>583750,00</i>	579250,00	579250,00	<b>583750,00</b>	0,00	0,43
6	138240,00	139584,00	141216,00	137952,00	139968,00	<i>142464,00</i>	0,54	3600,00
7	16668,00	17409,00	17004,00	17262,00	17226,00	<i>17664,00</i>	0,93	3600,00
8	65741,00	68645,60	69121,20	69747,20	71236,40	<i>71972,40</i>	0,38	3600,00
9	119772,00	128952,00	<i>133632,00</i>	128556,00	130860,00	98748,00	-	3600,00
10	<i>15360,00</i>	<i>15360,00</i>	<i>15360,00</i>	<i>15360,00</i>	<i>15360,00</i>	<b>15360,00</b>	0,00	0,58
11	49995,00	53202,80	52873,60	53202,80	53202,80	<b>54761,00</b>	0,00	170,85
12	23529,00	<i>24235,20</i>	23673,00	23990,40	23990,40	24076,80	2,75	3600,00
13	<i>36556,80</i>	<i>36556,80</i>	<i>36556,80</i>	<i>36556,80</i>	<i>36556,80</i>	<b>36556,80</b>	0,00	71,59
14	56492,80	65316,80	<i>68723,20</i>	<i>68723,20</i>	<i>68723,20</i>	<i>68723,20</i>	0,29	3600,00
15	37558,80	39727,20	39382,20	40590,00	40590,00	<b>40807,80</b>	0,00	23,46
16	556458,00	595770,00	591535,00	571290,00	603000,00	<i>632274,00</i>	2,28	3600,00
Tempo médio (s)	-	-	30,00	-	42,00			1593,66

**Negrito** indica solução ótima.

*Itálico* indica MSC.

- indica que o Gurobi não determinou uma solução/dual bound.

FONTE: o autor (2020)

Para o caso com separação de caixas, obteve-se melhoria das soluções apresentadas por Eley (2003) em 10 instâncias, e a solução ótima foi alcançada em 10 problemas, como pode-se observar detalhadamente na TABELA 16.

Novamente, o coeficiente de estabilidade foi definido como  $\alpha = 1$ , isto é, um suporte de 100% da área da base das caixas é exigido. Embora a restrição de estabilidade da carga aumente significativamente a complexidade dos problemas, obteve-se solução ótima em 7 instâncias. Quando considera-se simultaneamente as

TABELA 16 – Resultados para as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) com separação de caixas

#	ELY	Este trabalho		
		Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)
1	5120,00	<b>7680,00</b>	0,00	3,72
2	85376,00	<b>85555,20</b>	0,00	17,46
3	<i>53262,50</i>	<b>53262,50</b>	0,00	3,55
4	<i>1354752,00</i>	<b>1354752,00</b>	0,00	0,09
5	536250,00	<b>538750,00</b>	0,00	1,97
6	139968,00	<i>140448,00</i>	0,48	3600,00
7	16707,00	<b>17664,00</b>	0,00	3565,08
8	69121,20	<i>71972,40</i>	0,38	3600,00
9	<i>128088,00</i>	95148,00	-	3600,00
10	<i>15360,00</i>	<b>15360,00</b>	0,00	0,54
11	52873,60	<b>54761,00</b>	0,00	180,49
12	22730,40	<i>23745,60</i>	4,12	3600,00
13	<i>34022,40</i>	33388,80	9,49	3600,00
14	<i>66995,20</i>	<b>66995,20</b>	0,00	1351,95
15	39382,20	<b>40807,80</b>	0,00	28,58
16	568482,00	<i>612546,00</i>	5,63	3600,00
Tempo médio (s)		30,00		1672,09

**Negrito** indica solução ótima.

*Itálico* indica MSC.

- indica que o Gurobi não determinou uma solução/*dual bound*.

FONTE: o autor (2020)

restrições de estabilidade e de separação das caixas, o valor objetivo é, em geral, menor do que no problema básico, em virtude na natureza mais restrita do problema. Ainda assim, as técnicas de resolução determinaram a solução ótima de 7 problemas. Os resultados para estes cenários são apresentados na TABELA 17.

TABELA 17 – Resultados para as instâncias de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) com estabilidade e com separação de caixas e estabilidade

#	Com estabilidade			Com estabilidade e separação de caixas		
	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)	Valor objetivo	Gap (%)	Tempo (s)
1	8640,00	1,11	3600,00	<b>6720,00</b>	0,00	18,60
2	85376,00	0,18	3600,00	85376,00	0,16	3600,00
3	<b>53262,50</b>	0,00	3,75	<b>53262,50</b>	0,00	3,31
4	<b>1354752,00</b>	0,00	0,73	<b>1354752,00</b>	0,00	0,94
5	<b>583750,00</b>	0,00	5,12	<b>538750,00</b>	0,00	14,33
6	142464,00	0,67	3600,00	139968,00	2,33	3600,00
7	10908,00	-	3600,00	16707,00	7,20	3600,00
8	40556,20	-	3600,00	32633,20	-	3600,00
9	92052,00	-	3600,00	67032,00	-	3600,00
10	<b>15360,00</b>	0,00	5,20	<b>15360,00</b>	0,00	5,43
11	<b>54761,00</b>	0,00	1636,92	<b>54761,00</b>	0,00	1544,85
12	18504,00	33,75	3600,00	15336,00	-	3600,00
13	<b>36556,80</b>	0,00	446,91	32755,20	11,61	3600,00
14	68723,20	0,62	3600,00	66995,20	2,48	3600,00
15	<b>40807,80</b>	0,00	1702,85	<b>40807,80</b>	0,00	1770,94
16	469266,00	-	3600,00	304200,00	-	3600,00
Tempo médio (s)			2262,59			2234,90

**Negrito** indica solução ótima.

- indica que o Gurobi não determinou uma solução/*dual bound*.

FONTE: o autor (2020)

A FIGURA 8 apresenta o padrão de carregamento obtido para a instância 12 de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) nos diferentes cenários avaliados no MHLOPP. Todas as caixas possuem suas bases completamente apoiadas por outros itens ou pelo piso do contêiner quando exige-se estabilidade da carga, e em casos com restrição de separação de caixas, os itens do tipo 1 e 2 (representados em cinza e azul, respectivamente) foram posicionados em contêineres distintos.

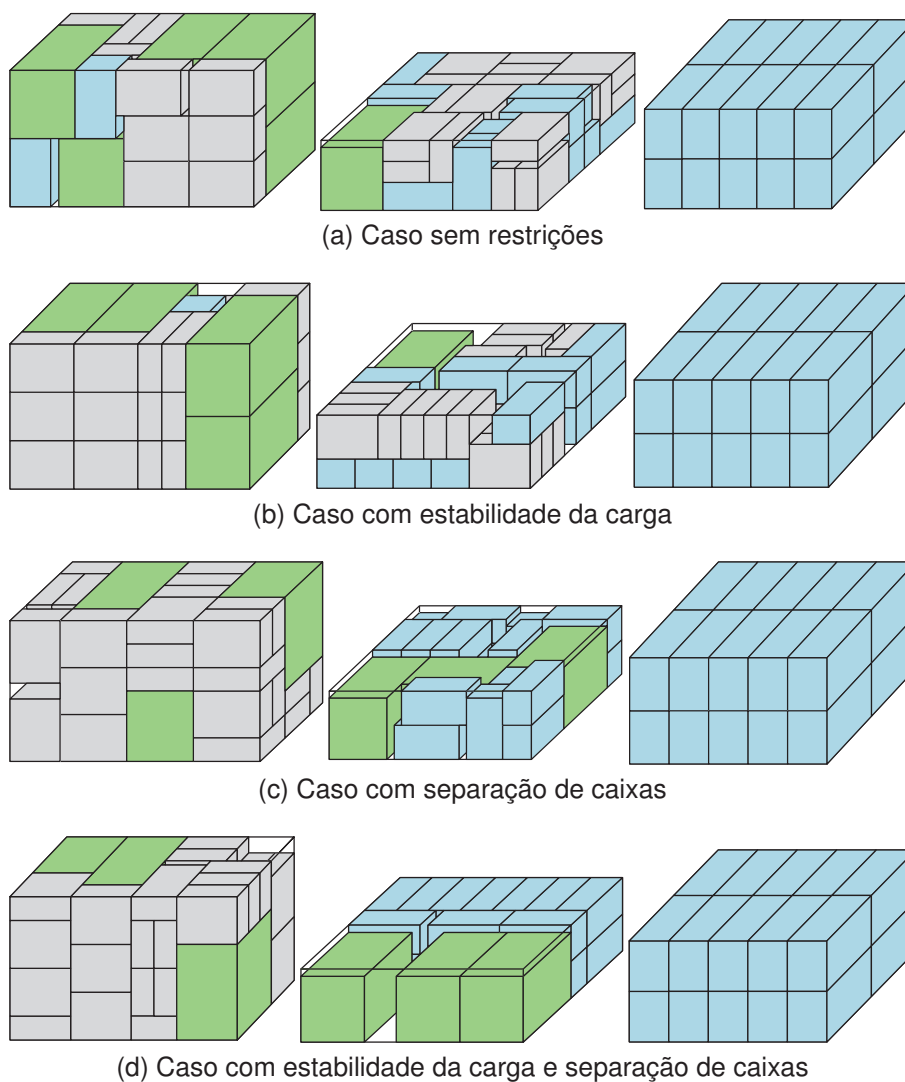


FIGURA 8 – Padrões de carregamento para a instância 12 de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994) no MHLOPP

FONTE: O autor (2020).

## 5 CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Este Capítulo apresenta as conclusões obtidas por meio da análise das formulações e dos resultados dos testes realizados neste trabalho. Além disso, são apresentadas propostas para expansão e continuidade de pesquisas relacionadas ao problema e às formulações discutidas ao longo dos capítulos anteriores.

### 5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou formulações matemáticas para resolução de Problemas de Carregamento de Contêineres. Inicialmente, no Capítulo 2, foi feita uma contextualização a respeito dos problemas de corte e empacotamento. Na sequência, foram discutidas as características de problemas envolvendo itens e objetos tridimensionais, tais como aqueles abordados neste trabalho, tomando como base a tipologia de Wäscher, Haußner e Schumann (2007). Foram apresentadas sete variações de problemas de minimização (do valor) das entradas e sete tipos de problemas de maximização (do valor) das saídas, dando destaque às particularidades de cada problema, em especial quanto a heterogeneidade dos tipos de caixas e de contêineres. As considerações práticas de Bischoff e Ratcliff (1995) foram apresentadas e caracterizadas; além disso, foi feita uma breve discussão a respeito da quantidade de vezes que tais considerações foram abordadas na literatura. Por fim, seguiu-se uma revisão de literatura, onde técnicas de resolução clássicas, formuladas para resolução de problemas com as mesmas características daqueles apresentados nesta tese, foram discutidas.

Formulações matemáticas, tanto para problemas de minimização (do valor) das entradas quanto para problemas de maximização (do valor) das saídas, foram discutidas no Capítulo 3. Partindo de conceitos preliminares básicos para o entendimento das formulações, passou-se a uma discussão a respeito do conceito de discretização, necessário para determinar as possíveis posições que uma caixa pode ocupar no interior de um contêiner nas formulações propostas. Quatro técnicas de discretização, que foram adaptadas aos problemas e testadas neste trabalho, foram apresentadas: *Normal Patterns*, *Reduced Raster Points*, *Regular Normal Patterns* e o Princípio *Meet in the Middle*. Formulações matemáticas para as considerações práticas de orientação das caixas, estabilidade e separação de itens foram apresentadas.

Para problemas de minimização (do valor) das saídas, técnicas para obtenção de *upper bounds* por meio da resolução de problemas de particionamento de conjuntos, juntamente com adaptações das heurísticas G&R de George e Robinson (1980) e GRMod de Moura e Oliveira (2005) foram apresentadas, com estratégias para obtenção

de tais *bounds* em situações envolvendo as considerações práticas abordadas no trabalho. Por fim, técnicas para cálculo de *lower bounds* também foram apresentadas para problemas do tipo SSSCSP e MSSCSP.

No Capítulo 4, foram apresentados resultados referentes aos testes computacionais realizados com as formulações propostas neste trabalho. Instâncias clássicas foram utilizadas nos testes, e os resultados obtidos foram comparados com outras estratégias de resolução da literatura. Inicialmente, realizou-se uma comparação entre as técnicas de discretização, mostrando que há uma significativa redução no número de variáveis e de restrições quando se comparam os modelos gerados utilizando a discretização unitária com as demais técnicas apresentadas neste trabalho. Além disso, mostrou-se que, de modo geral, modelos obtidos usando o *Reduced Raster Points* e o Princípio *Meet in the Middle* também possuem menor número de variáveis e restrições em comparação aqueles gerados com o *Normal Patterns*. Analisou-se o efeito das discretizações em problemas envolvendo a restrição de estabilidade, e os resultados mostraram que, para que não ocorra perda de solução ótima, é necessário usar a discretização *Normal Patterns* em problemas que envolvem essa consideração prática.

Ainda no Capítulo 4, realizou-se uma discussão a respeito de problemas de minimização (do valor) das entradas. Foi feita uma análise do *upper bound* e do *lower bound* para cada uma das 47 instâncias do SSSCSP, e a comparação entre os valores permitiu a obtenção da solução ótima em 23 problemas sem considerações práticas adicionais e em problemas com restrição de estabilidade, enquanto tal comparação levou a solução de 13 problemas envolvendo separação de caixas e também quando se exigia, simultaneamente, estabilidade da carga e separação de itens. Na sequência, a resolução dos modelos para as instâncias cuja otimalidade não foi provada por comparação de *bounds* permitiu a obtenção de soluções ótimas em diversas instâncias. De modo geral, as técnicas apresentadas neste trabalho permitiram que se calculasse a solução ótima em 43 problemas sem adição de considerações práticas, 36 instâncias com estabilidade da carga, 37 casos com separação de itens, e 29 problemas com estabilidade e separação de caixas. Considerando-se as 17 instâncias usadas para analisar as formulações para o MSSCSP, obteve-se solução ótima em 5 problemas sem adição de considerações práticas, 4 casos com estabilidade, 3 instâncias com separação de itens e 4 problemas onde se considerou, simultaneamente, estabilidade e separação de caixas.

A análise do resultados encerra-se com os problemas de maximização (do valor) das saídas. Para o MILOPP, foi apresentado um novo conjunto de instâncias, composto por 42 problemas, disponibilizado publicamente. Além disso, foram determinadas soluções ótimas em 31 problemas sem restrições adicionais, 24 casos com estabilidade, 32 instâncias com separação de caixas e problemas onde estabilidade

e separação de itens foram consideradas. Por fim, nos resultados obtidos com os 16 problemas usados para analisar a performance das formulações para o MHLOPP, obteve-se solução ótima em 9 problemas sem adição de considerações práticas, 7 instâncias com estabilidade, 10 casos com separação de itens e em 7 problemas com estabilidade da carga e separação de itens.

Além das estratégias de resolução deste trabalho permitirem a obtenção de soluções ótimas dentro de um limite de tempo pré-estabelecido, em todos os cenários onde realizou-se comparações com outras técnicas de resolução verificou-se a obtenção resultados que constituem a melhor solução conhecida, mesmo em casos onde não foi possível determinar a solução ótima do problema.

Na sequência, são apresentadas propostas de trabalhos futuros com base pesquisa desenvolvida neste trabalho.

## 5.2 PROPOSTAS PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA

Novas pesquisas podem ser realizadas buscando a integração de outras considerações práticas não tratadas neste trabalho, de modo a abordar problemas mais realistas. Bortfeldt e Wäscher (2013), Zhao et al. (2016) e Vega-Mejía, Montoya-Torres e Islam (2019) apontam que ainda há restrições pouco abordadas na literatura, assim como também destacam que, em situações reais de carregamento, uma série de considerações devem ser satisfeitas de modo simultâneo; entretanto, há poucas estratégias de resolução que contemplam tais situações. Ainda nesse sentido, pode-se avaliar a performance das estratégias de resolução deste trabalho com instâncias oriundas de situações reais, comparando os padrões de carregamento das formulações com aqueles realizados na prática.

As formulações matemáticas apresentadas neste trabalho utilizam-se das discretizações NP, RRP, RNP e MiM para determinar os possíveis pontos que podem ser ocupados pelo vértice inferior frontal esquerdo de uma caixa. Desse modo, dentre as possibilidades a serem exploradas em trabalhos futuros, destacam-se análises que podem ser efetuadas de modo demonstrar matematicamente que não há perda de generalidade ao se utilizar a discretização RRP. Da mesma forma, pode-se verificar se, para algum tipo de problema de corte e empacotamento, é possível estabelecer uma relação de dominância envolvendo o RRP e o RNP, tal como Côté e Iori (2018) mostraram existir entre o MiM e RNP.

A obtenção de *bounds* ajustados ao problema é de fundamental importância para as formulações matemáticas apresentadas neste trabalho, pois permitem que os modelos tenham um número menor de variáveis e restrições, que possivelmente podem demandar menor esforço computacional em sua resolução. Logo, outra perspectiva de



continuidade da pesquisa é a proposta e análise de outras técnicas de obtenção de *bounds* para os problemas de minimização (do valor) das entradas. A adaptação dos *lower bounds* propostos por Boschetti (2004), de modo a permitir que as caixas sejam rotacionadas de modo ortogonal, e o aprimoramento dos *lower bounds* de Liao e Hsu (2013) podem constituir o ponto de partida para tais propostas.

Outra vertente para continuidade da pesquisa consiste na combinação das formulações apresentadas neste trabalho com algoritmos de roteamento, de modo a abordar o problema de roteamento de veículos capacitados com carregamento de itens tridimensionais, também chamado, na literatura, de *three-dimensional loading capacitated vehicle routing problems — 3L-CVRP*.

O 3L-CVRP foi introduzido por Gendreau et al. (2006), generalizando problemas de carregamento de itens tridimensionais e roteamento, que até então eram abordados separadamente. Neste problema, tem-se um grafo direcionado  $G(\mathbb{V}, \mathbb{E})$ , que representa uma rede de clientes com demandas a serem atendidas. O conjunto  $\mathbb{V} = 0, 1, \dots, N$  representa os vértices do grafo, sendo que o depósito é representado pelo vértice 0; toda rota deve iniciar e terminar nesse vértice. Cada cliente possui uma demanda  $b_i$  de itens tridimensionais com dimensões  $(l_i, w_i, h_i)$ . Os itens são distribuídos por uma frota limitada de veículos homogêneos, isto é, todos tem dimensão  $(L, W, H)$ . Além disso, os itens devem ser carregados em uma ordem inversa ao seu ponto de descarga, isto é, as últimas caixas a serem carregadas devem ser as primeiras a serem descarregadas, respeitando a política *Last In, First Out* (LIFO).

Entretanto, embora o 3L-CVRP clássico cada cliente em uma rota deva ser visitado apenas uma única vez (POLLARIS et al., 2015), em diversas situações cotidianas, como apontam Yi e Bortfeldt (2018) e Bortfeldt e Yi (2020), podem surgir casos onde a demanda de um cliente não pode ser designada a um único veículo, por questões de peso ou devido a quantidade de itens solicitados. Situações como essa levam ao problema de roteamento de veículos capacitados com carregamento de itens tridimensionais e entregas divididas (*three-dimensional loading split deliveries capacitated vehicle routing problems — 3L-SDCVRP*), outra possível alternativa a ser explorada tomando como base este trabalho.

A literatura envolvendo o 3L-SDCVRP é escassa. O trabalho de Moura e Oliveira (2009) considera diversas considerações práticas, tais como estabilidade da carga, orientações das caixas, política LIFO e janelas de tempo para o atendimento dos clientes. Em uma das estratégias de resolução apresentadas, Moura e Oliveira (2009) relaxam a restrição LIFO e a exigência que cada vértice faça parte de uma única rota, essencialmente transformando o problema em um 3L-SDCVRP. O problema é resolvido de modo que as tarefas de carregamento e roteamento são realizadas simultaneamente, sendo que um algoritmo GRASP é utilizado para determinar as

rotas e a heurística GRMod de Moura e Oliveira (2005) para determinar os padrões de carregamento.

Ceschia, Schaerf e Stützle (2013) abordam o 3L-SDCVRP por meio de uma busca local, que é utilizada para obter uma solução inicial para o problema. Na sequência, um algoritmo *simulated annealing* é utilizado para melhoria da solução obtida na fase de busca local. Nos casos em que o *simulated annealing* não apresenta melhoria da solução, um algoritmo de busca local *large neighborhood search* é executado.

Yi e Bortfeldt (2018) e Bortfeldt e Yi (2020) utilizam um algoritmo genético para geração de padrões de carregamento e uma busca tabu para determinar as rotas de um problema que considera dados reais de uma grande companhia automotiva da China.

Dada a pequena quantidade de artigos publicados a respeito do 3L-SDCVRP, uma proposta para continuação deste trabalho é apresentar uma formulação matemática para o 3L-SDCVRP, acrescentando-se as considerações práticas de carregamento completo de grupos de itens e também a restrição de separação de itens, além da restrição de múltiplos destinos, para que se respeite a política LIFO ao se fazer o carregamento. A adição da restrição de separação de itens pode ser utilizada, também, para explorar situações onde é necessário visitar um cliente mais do que uma vez para fazer a entrega de itens conflitantes, tais como alimentos e material de limpeza, que não podem ser carregados no mesmo veículo.

Outra proposta que pode mostrar-se produtiva consiste na abordagem de problemas em que se tem uma frota limitada de veículos. Como o problema exige que todas as demandas dos clientes sejam atendidas, pode-se considerar a possibilidade de alugar capacidade para atender os clientes, visando minimizar o custo total da operação (roteamento com os veículos próprios e custo do aluguel da capacidade extra), bem como estudar frotas heterogêneas de veículos.



## REFERÊNCIAS

- ALLEN, S. D.; BURKE, E. K.; KENDALL, G. A hybrid placement strategy for the three-dimensional strip packing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 209, n. 3, p. 219–227, 2011. Citado 1 vez na página 19.
- ALONSO, M. T. et al. Mathematical models for multicontainer loading problems. **Omega**, v. 66, p. 106–117, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 22, 24.
- ALONSO, M.T. et al. Mathematical models for Multi Container Loading Problems with practical constraints. **Computers & Industrial Engineering**, v. 127, p. 722–733, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 18, 22, 23.
- ANDRADE, R.; BIRGIN, E. G.; MORABITO, R. Two-stage two-dimensional guillotine cutting stock problems with usable leftover. **International Transactions in Operational Research**, v. 23, n. 1–2, p. 121–145, 2016. Citado 1 vez na página 17.
- ARAYA, I.; GUERRERO, K.; NUÑEZ, E. VCS: A new heuristic function for selecting boxes in the single container loading problem. **Computers & Operations Research**, v. 82, p. 27–35, 2017. Citado 1 vez na página 24.
- ARBIB, C.; MARINELLI, F. Maximum lateness minimization in one-dimensional bin packing. **Omega**, v. 68, p. 76–84, 2017. Citado 1 vez na página 17.
- BAAZAOU, M.; HANAFI, S.; KAMOUN, H. Three-Dimensional Multiple-Bin-Size Bin Packing: A Case Study with a New MILP-Based Upper Bound. In: **Operational Research in Business and Economics**. Edição: E. Grigoroudis e M. Doumpos. New York: Springer International Publishing, 2017. p. 225–234. Citado 1 vez na página 19.
- BEASLEY, J. E. An Exact Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting Tree Search Procedure. **Operations Research**, INFORMS, v. 33, n. 1, p. 49–64, 1985. Citado 1 vez na página 27.
- BISCHOFF, E. E.; RATCLIFF, M. S. W. Issues in the development of approaches to container loading. **Omega**, v. 23, n. 4, p. 377–390, 1995. Citado 5 vezes nas páginas 13, 21, 35, 67.
- BORTFELDT, A. Eine Heuristik für Multiple Containerladeprobleme. **OR-Spektrum**, v. 22, n. 2, p. 239–261, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 18, 20, 25, 46, 47.
- BORTFELDT, A.; HOMBERGER, J. Packing first, routing second—a heuristic for the vehicle routing and loading problem. **Computers & Operations Research**, v. 40, n. 3, p. 873–885, 2013. Citado 1 vez na página 23.

BORTFELDT, A.; MACK, D. A heuristic for the three-dimensional strip packing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 3, p. 1267–1279, 2007.

Citado 1 vez na página 19.

BORTFELDT, A.; WÄSCHER, G. Constraints in container loading – A state-of-the-art review. **European Journal of Operational Research**, v. 229, n. 1, p. 1–20, 2013.

Citado 9 vezes nas páginas 13, 20, 21, 24, 36, 69.

BORTFELDT, A.; YI, J. The Split Delivery Vehicle Routing Problem with three-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 282, n. 2, p. 545–558, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 24, 70, 71.

BOSCHETTI, M. A. New lower bounds for the three-dimensional finite bin packing problem. **Discrete Applied Mathematics**, v. 140, n. 1, p. 241–258, 2004. Citado 1 vez na página 70.

BOSCHETTI, M. A.; MINGOZZI, A.; HADJICONSTANTINOU, E. New upper bounds for the two-dimensional orthogonal non-guillotine cutting stock problem. **IMA Journal of Management Mathematics**, v. 13, n. 2, p. 95–119, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 30, 37.

BRACHT, E. C. et al. Dynamic cargo stability in loading and transportation of containers. In: 2016 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE). [S.l.: s.n.], ago. 2016. p. 227–232. Citado 1 vez na página 51.

CESCHIA, S.; SCHAERF, A. Local search for a multi-drop multi-container loading problem. **Journal of Heuristics**, v. 19, n. 2, p. 275–294, 2013. Citado 1 vez na página 20.

CESCHIA, S.; SCHAERF, A.; STÜTZLE, T. Local search techniques for a routing-packing problem. **Computers & Industrial Engineering**, v. 66, n. 4, p. 1138–1149, 2013. Citado 1 vez na página 71.

CHE, C. H. et al. The multiple container loading cost minimization problem. **European Journal of Operational Research**, v. 214, n. 3, p. 501–511, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 18, 25, 46.

CHEN, C. S.; LEE, S. M.; SHEN, Q. S. An analytical model for the container loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 80, n. 1, p. 68–76, 1995. Citado 1 vez na página 19.

CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An Algorithm for Two-Dimensional Cutting Problems. **Operations Research**, v. 25, n. 1, p. 30–44, 1977. Citado 1 vez na página 30.

CHRISTOPHER, M. **Logística e gerenciamento da cadeia de suprimentos**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018. Citado 1 vez na página 15.

- CORRECHER, J. F. et al. Solving a large multicontainer loading problem in the car manufacturing industry. **Computers & Operations Research**, v. 82, p. 139–152, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18, 23.
- CÔTÉ, J.-F.; IORI, M. The meet-in-the-middle principle for cutting and packing problems. **INFORMS Journal on Computing**, v. 30, n. 4, p. 646–661, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 30, 50, 69.
- DE ALMEIDA, A.; FIGUEIREDO, M. B. A particular approach for the Three-dimensional Packing Problem with additional constraints. **Computers & Operations Research**, v. 37, n. 11, p. 1968–1976, 2010. Citado 1 vez na página 19.
- DE QUEIROZ, T. A. **Algoritmos para problemas de corte e empacotamento**. 2010. 141 f. Tese de doutorado – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo. Citado 1 vez na página 30.
- DE QUEIROZ, T. A. et al. Algorithms for 3D guillotine cutting problems: Unbounded knapsack, cutting stock and strip packing. **Computers & Operations Research**, v. 39, n. 2, p. 200–212, 2012. Citado 1 vez na página 30.
- DE QUEIROZ, T. A. et al. Two-dimensional Disjunctively Constrained Knapsack Problem: Heuristic and exact approaches. **Computers & Industrial Engineering**, v. 105, p. 313–328, 2017. Citado 1 vez na página 24.
- DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 2, p. 145–159, 1990. Citado 2 vez na página 17.
- ELEY, M. A bottleneck assignment approach to the multiple container loading problem. **OR Spectrum**, v. 25, n. 1, p. 45–60, 2003. Citado 16 vezes nas páginas 18, 22–24, 26, 35, 46–48, 56, 64.
- ELEY, M. Solving container loading problems by block arrangement. **European Journal of Operational Research**, v. 141, n. 2, p. 393–409, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 18, 22, 25, 47, 53, 56.
- ELHEDHLI, S.; GZARA, F.; YAN, Y. F. A MIP-based slicing heuristic for three-dimensional bin packing. **Optimization Letters**, v. 11, n. 8, p. 1547–1563, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 19, 22.
- GENDREAU, M. et al. A Tabu Search Algorithm for a Routing and Container Loading Problem. **Transportation Science**, v. 40, n. 3, p. 342–350, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 70.
- GEORGE, J. A.; ROBINSON, D. F. A heuristic for packing boxes into a container. **Computers & Operations Research**, v. 7, n. 3, p. 147–156, 1980. Citado 6 vezes nas páginas 15, 19, 38, 39, 67.

GRUNEWALD, M. et al. Multi-item single-source ordering with detailed consideration of transportation capacities. **Journal of Business Economics**, v. 88, n. 7, p. 971–1007, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 18, 24.

GUROBI. **Gurobi Optimizer Reference Manual**. Versão 8.1. [S.l.], 2019. :

[https://www.gurobi.com/wp-](https://www.gurobi.com/wp-content/plugins/hd_documentations/documentation/8.1/refman.pdf)

[content/plugins/hd\\_documentations/documentation/8.1/refman.pdf](https://www.gurobi.com/wp-content/plugins/hd_documentations/documentation/8.1/refman.pdf). Citado 1 vez na página 45.

HAESSLER, R. W.; TALBOT, F. B. Load planning for shipments of low density products. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 2, p. 289–299, 1990. Citado 1 vez na página 23.

HERZ, J. C. Recursive Computational Procedure for Two-dimensional Stock Cutting. **IBM Journal of Research and Development**, v. 16, n. 5, p. 462–469, 1972. Citado 1 vez na página 30.

HIFI, M. Approximate algorithms for the container loading problem. **International Transactions in Operational Research**, v. 9, n. 6, p. 747–774, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 20, 24.

HIFI, M.; MICHRAFY, M. Reduction strategies and exact algorithms for the disjunctively constrained knapsack problem. **Computers & Operations Research**, v. 34, n. 9, p. 2657–2673, 2007. Citado 1 vez na página 24.

HIFI, M.; NEGRE, S.; WU, L. Hybrid greedy heuristics based on linear programming for the three-dimensional single bin-size bin packing problem. **International Transactions in Operational Research**, v. 21, n. 1, p. 59–79, 2014. Citado 1 vez na página 19.

IVANCIC, N. J.; MATHUR, K.; MOHANTY, B. B. An integer programming based heuristic approach to the three-dimensional packing problem. **Journal of Manufacturing and Operations Management**, v. 2, p. 268–298, 1989. Citado 24 vezes nas páginas 18, 23, 25, 46, 47, 49, 53–60.

JANSEN, K. An Approximation Scheme for Bin Packing with Conflicts. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 3, n. 4, p. 363–377, 1999. Citado 1 vez na página 24.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R. On solving three-dimensional open-dimension rectangular packing problems. **Engineering Optimization**, v. 49, n. 5, p. 733–745, 2017. Citado 1 vez na página 19.

JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. MIP-based approaches for the container loading problem with multi-drop constraints. **Annals of Operations Research**, v. 199, n. 1, p. 51–75, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 17, 23.

- JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. **Computers & Operations Research**, v. 39, n. 1, p. 74–85, 2012. Citado 15 vezes nas páginas 15, 19, 20, 22–24, 27, 33, 37, 45, 46, 48, 49, 51.
- KHANAFER, A.; CLAUTIAUX, F.; TALBI, E.-G. Tree-decomposition based heuristics for the two-dimensional bin packing problem with conflicts. **Computers & Operations Research**, v. 39, n. 1, p. 54–63, 2012. Citado 1 vez na página 24.
- KOLOCH, G.; KAMINSKI, B. Nested vs. joint optimization of vehicle routing problems with three-dimensional loading constraints. **Engineering Letters**, v. 18, p. 193–198, 2010. Citado 1 vez na página 20.
- LIAO, C.-S.; HSU, C.-H. New lower bounds for the three-dimensional orthogonal bin packing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 225, n. 2, p. 244–252, 2013. Citado 1 vez na página 70.
- LIM, A.; ZHANG, X. The Container Loading Problem. In: PROCEEDINGS of the 2005 ACM Symposium on Applied Computing. Santa Fe, New Mexico: [s.n.], 2005. (SAC '05), p. 913–917. Citado 2 vezes nas páginas 25, 46.
- LIM, A. et al. An iterated construction approach with dynamic prioritization for solving the container loading problems. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 4, p. 4292–4305, 2012. Citado 1 vez na página 46.
- LIN, J.-L.; CHANG, C.-H.; YANG, J.-Y. A Study of Optimal System for Multiple-Constraint Multiple-Container Packing Problems. In: ALI, M.; DAPOIGNY, R. (Ed.). **Advances in Applied Artificial Intelligence**. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2006. p. 1200–1210. Citado 1 vez na página 19.
- MAHVASH, B.; AWASTHI, A.; CHAUHAN, S. A column generation-based heuristic for the three-dimensional bin packing problem with rotation. **Journal of the Operational Research Society**, v. 69, n. 1, p. 78–90, 2018. Citado 1 vez na página 19.
- MÄNNEL, D.; BORTFELDT, A. A hybrid algorithm for the vehicle routing problem with pickup and delivery and three-dimensional loading constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 254, n. 3, p. 840–858, 2016. Citado 1 vez na página 24.
- MARTINEZ-SYKORA, A. et al. Constructive procedures to solve 2-dimensional bin packing problems with irregular pieces and guillotine cuts. **Omega**, v. 52, p. 15–32, 2015. Citado 1 vez na página 17.
- MOHANTY, B. B.; MATHUR, K.; IVANCIC, N. J. Value considerations in three-dimensional packing – A heuristic procedure using the fractional knapsack problem. **European Journal of Operational Research**, v. 74, n. 1, p. 143–151, 1994. Citado 12 vezes nas páginas 20, 23, 26, 47, 49, 62–66.

- MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. A GRASP approach to the container-loading problem. **IEEE Intelligent Systems**, v. 20, n. 4, p. 50–57, 2005. Citado 9 vezes nas páginas 15, 19, 38–41, 67, 71.
- MOURA, A.; OLIVEIRA, J. F. An integrated approach to the vehicle routing and container loading problems. **OR Spectrum**, v. 31, n. 4, p. 775–800, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 13, 70.
- OLSSON, J.; LARSSON, T.; QUTTINEH, N.-H. Automating the planning of container loading for Atlas Copco: Coping with real-life stacking and stability constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 280, n. 3, p. 1018–1034, 2020. Citado 8 vezes nas páginas 15, 17, 22–24.
- PAQUAY, C.; LIMBOURG, S.; SCHYNS, M. A tailored two-phase constructive heuristic for the three-dimensional Multiple Bin Size Bin Packing Problem with transportation constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 267, n. 1, p. 52–64, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19, 23.
- POLLARIS, H. et al. Vehicle routing problems with loading constraints: state-of-the-art and future directions. **OR Spectrum**, v. 37, n. 2, p. 297–330, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 24, 70.
- RAMOS, A. G.; OLIVEIRA, J. F.; LOPES, M. P. A physical packing sequence algorithm for the container loading problem with static mechanical equilibrium conditions. **International Transactions in Operational Research**, v. 23, n. 1-2, p. 215–238, 2016. Citado 1 vez na página 51.
- RAMOS, A. G.; SILVA, E.; OLIVEIRA, J. F. A new load balance methodology for container loading problem in road transportation. **European Journal of Operational Research**, v. 266, n. 3, p. 1140–1152, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 24, 37.
- RANCK JÚNIOR, R. et al. A hybrid approach for a multi-compartment container loading problem. **Expert Systems with Applications**, v. 137, p. 471–492, 2019. Citado 1 vez na página 23.
- REN, J.; TIAN, Y.; SAWARAGI, T. A priority-considering approach for the multiple container loading problem. **International Journal of Metaheuristics**, v. 1, n. 4, p. 298–316, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 20, 23, 26, 46, 47.
- REN, J.; TIAN, Y.; SAWARAGI, T. A tree search method for the container loading problem with shipment priority. **European Journal of Operational Research**, v. 214, n. 3, p. 526–535, 2011. Citado 1 vez na página 22.
- SCHEITHAUER, G.; TERNO, J. The G4-Heuristic for the Pallet Loading Problem. **The Journal of the Operational Research Society**, v. 47, n. 4, p. 511–522, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 25, 30.



SHENG, L. et al. Heuristic algorithm for the container loading problem with multiple constraints. **Computers & Industrial Engineering**, v. 108, p. 149–164, 2017. Citado 1 vez na página 22.

SILVA, E. F.; TOFFOLO, T. A. M.; WAUTERS, T. Exact methods for three-dimensional cutting and packing: A comparative study concerning single container problems. **Computers & Operations Research**, v. 109, p. 12–27, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 19, 20.

SILVA, J. L. C.; SOMA, N. Y.; MACULAN, N. A greedy search for the three-dimensional bin packing problem: the packing static stability case. **International Transactions in Operational Research**, v. 10, n. 2, p. 141–153, 2003. Citado 1 vez na página 51.

TAKAHARA, S. A Multi-start Local Search Approach to the Multiple Container Loading Problem. In: BEDNORZ, W. (Ed.). **Greedy Algorithms**. Rijeka: InTech, 2008. cap. 4, p. 55–68. Citado 4 vezes nas páginas 20, 26, 46, 47.

TERNO, J.; LINDEMANN, R.; SCHEITHAUER, G. **Zuschnittprobleme und ihre praktische Lösung**. [S.l.]: Fachbuchverl, 1987. (Mathematik für Ingenieure). Citado 1 vez na página 30.

TERNO, J. et al. An efficient approach for the multi-pallet loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 123, n. 2, p. 372–381, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 22, 23.

TOFFOLO, T. A. M. et al. A two-dimensional heuristic decomposition approach to a three-dimensional multiple container loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 257, n. 2, p. 526–538, 2017. Citado 2 vez na página 23.

TOLEDO, F. M. B. et al. The Dotted-Board Model: A new MIP model for nesting irregular shapes. **International Journal of Production Economics**, v. 145, n. 2, p. 478–487, 2013. Citado 1 vez na página 17.

VEGA-MEJÍA, C. A.; MONTOYA-TORRES, J. R.; ISLAM, S. M. N. Consideration of triple bottom line objectives for sustainability in the optimization of vehicle routing and loading operations: a systematic literature review. **Annals of Operations Research**, v. 273, n. 1–2, p. 311–375, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 13, 21, 24, 69.

WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 3, p. 1109–1130, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 18, 21, 22, 67.

WU, Y. et al. Three-dimensional bin packing problem with variable bin height. **European Journal of Operational Research**, v. 202, n. 2, p. 347–355, 2010. Citado 1 vez na página 19.

XAVIER, E. C.; MIYAZAWA, F. K. A one-dimensional bin packing problem with shelf divisions. **Discrete Applied Mathematics**, v. 156, n. 7, p. 1083–1096, 2008. Citado 1 vez na página 17.

YI, J.; BORTFELDT, A. The Capacitated Vehicle Routing Problem with Three-Dimensional Loading Constraints and Split Delivery—A Case Study. In: **Operations Research Proceedings 2016**. Edição: A. Fink, A. Fügenschuh e M. J. Geiger. New York: Springer International Publishing, 2018. p. 351–356. Citado 2 vezes nas páginas 70, 71.

ZHAO, X. et al. A comparative review of 3D container loading algorithms. **International Transactions in Operational Research**, v. 23, n. 1–2, p. 287–320, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 13, 21, 69.

ZHU, W.; HUANG, W.; LIM, A. A prototype column generation strategy for the multiple container loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 223, n. 1, p. 27–39, 2012. Citado 11 vezes nas páginas 18, 23–26, 38, 42, 46, 47, 53, 56.



## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – FORMULAÇÕES PARA OBTENÇÃO DE CONJUNTOS DISCRETIZADOS

### A.1 NORMAL PATTERNS

$$X_k^{NP} = \{p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot l_{ig}, \quad 0 \leq p \leq L_k - \min_i(l_{ig}), \quad 0 \leq \beta_i \leq b_i, \quad \beta_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall g \in \Omega_i\},$$

$$\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.1})$$

$$Y_k^{NP} = \{q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_{ig}, \quad 0 \leq q \leq W_k - \min_i(w_{ig}), \quad 0 \leq \beta_i \leq b_i, \quad \beta_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall g \in \Omega_i\},$$

$$\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.2})$$

$$Z_k^{NP} = \{r \in \mathbb{Z} \mid r = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot h_{ig}, \quad 0 \leq r \leq H_k - \min_i(h_{ig}), \quad 0 \leq \beta_i \leq b_i, \quad \beta_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall g \in \Omega_i\},$$

$$\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.3})$$

### A.2 REDUCED RASTER POINTS

$$X_k^{RRP} = \{\langle L_k - x \rangle \mid x \in X_k^{NP}\}, \text{ com } \langle L_k - x \rangle = \max\{p \in X_k^{NP} \mid p \leq L_k - x\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.4})$$

$$Y_k^{RRP} = \{\langle W_k - y \rangle \mid y \in Y_k^{NP}\}, \text{ com } \langle W_k - y \rangle = \max\{q \in Y_k^{NP} \mid q \leq W_k - y\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.5})$$

$$Z_k^{RRP} = \{\langle H_k - z \rangle \mid z \in Z_k^{NP}\}, \text{ com } \langle H_k - z \rangle = \max\{r \in Z_k^{NP} \mid r \leq H_k - z\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.6})$$

### A.3 REGULAR NORMAL PATTERNS

$$X_k^{RNP} = \cup_{\forall i} X_k^i,$$

$$\text{com } X_k^i = \{p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{\forall \zeta \neq i} \beta_\zeta \cdot l_{\zeta g}, \quad 0 \leq p \leq L - l_{ig}, \quad 0 \leq \beta_\zeta \leq b_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_\zeta\},$$

$$\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
Y_k^{RNP} &= \cup_{\forall i} Y_k^i, \\
\text{com } Y_k^i &= \{q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{\forall \zeta \neq i} \beta_\zeta \cdot w_{\zeta g}, \quad 0 \leq q \leq W - w_{ig}, \quad 0 \leq \beta_\zeta \leq b_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_\zeta\}, \\
&\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_k^{RNP} &= \cup_{\forall i} Z_k^i, \\
\text{com } Z_k^i &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r = \sum_{\forall \zeta \neq i} \beta_\zeta \cdot h_{\zeta g}, \quad 0 \leq r \leq H - h_{ig}, \quad 0 \leq \beta_\zeta \leq b_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_\zeta\}, \\
&\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

#### A.4 MEET IN THE MIDDLE

$$\begin{aligned}
X_k^{MiM} &= \cup_{\forall i} X_k^{i\mathbb{T}}, \\
&\text{com } \cup_{\forall i} X_k^{i\mathbb{T}} = \mathcal{L}_{X_k}^{i\mathbb{T}} \cup \mathcal{R}_{X_k}^{i\mathbb{T}} \\
&\text{com} \\
\mathcal{L}_{X_k}^{i\mathbb{T}} &= \{p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{\forall \zeta \neq i} \beta_\zeta \cdot l_{\zeta g}, \quad 0 \leq p \leq \min(\mathbb{T} - 1, L_k - l_{ig}), \quad 0 \leq \beta_\zeta \leq b_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_i\}, \\
&\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \\
&\text{e} \\
\mathcal{R}_{X_k}^{i\mathbb{T}} &= \{L_k - l_{ig} - p \in \mathbb{Z} \mid p = \sum_{\forall \zeta \neq i} \beta_\zeta \cdot l_{\zeta g}, \quad 0 \leq p \leq L_k - l_{ig} - \mathbb{T}, \quad 0 \leq \beta_\zeta \leq b_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_i\}, \\
&\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_k^{MiM} &= \cup_{\forall i} Y_k^{i\mathbb{T}}, \\
&\text{com } \cup_{\forall i} Y_k^{i\mathbb{T}} = \mathcal{L}_{Y_k}^{i\mathbb{T}} \cup \mathcal{R}_{Y_k}^{i\mathbb{T}} \\
&\text{com} \\
\mathcal{L}_{Y_k}^{i\mathbb{T}} &= \{q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{\forall \zeta \neq i} \beta_\zeta \cdot l_{\zeta g}, \quad 0 \leq q \leq \min(\mathbb{T} - 1, W_k - w_{ig}), \quad 0 \leq \beta_\zeta \leq b_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_i\}, \\
&\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \\
&\text{e} \\
\mathcal{R}_{Y_k}^{i\mathbb{T}} &= \{W_k - w_{ig} - q \in \mathbb{Z} \mid q = \sum_{\forall \zeta \neq i} \beta_\zeta \cdot l_{\zeta g}, \quad 0 \leq q \leq W_k - w_{ig} - \mathbb{T}, \quad 0 \leq \beta_\zeta \leq b_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_i\}, \\
&\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_k^{MiM} &= \cup_{\forall i} Z_k^{i\mathbb{T}}, \\
\text{com } \cup_{\forall i} Z_k^{i\mathbb{T}} &= \mathcal{L}_{Z_k}^{i\mathbb{T}} \cup \mathcal{R}_{Z_k}^{i\mathbb{T}} \\
&\text{com} \\
\mathcal{L}_{Z_k}^{i\mathbb{T}} &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r = \sum_{\forall \zeta \neq i} \beta_\zeta \cdot l_{\zeta g}, \quad 0 \leq r \leq \min(\mathbb{T} - 1, H_k - h_{ig}), \quad 0 \leq \beta_\zeta \leq b_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_i\}, \\
&\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \\
&\text{e} \\
\mathcal{R}_{Z_k}^{i\mathbb{T}} &= \{H_k - h_{ig} - r \in \mathbb{Z} \mid r = \sum_{\forall \zeta \neq i} \beta_\zeta \cdot l_{\zeta g}, \quad 0 \leq r \leq H_k - h_{ig} - \mathbb{T}, \quad 0 \leq \beta_\zeta \leq b_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_\zeta, \quad \forall g \in \Omega_i\}, \\
&\forall k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\} \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$